លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ទ្រឹស្តីចំនួន

Number Theory

1234567890

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

សិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍

$$x^2 - d.y^2 = 1$$

គណៈកម្មការនិពន្ធនិងរៀបរៀង

លោក **លឹម ផល្គុន** និង លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ុំង សំណាង
លោក ឆិត្យ ម៉េង	អ្នកស្រី ឌុយ រីណា
លោក ញ៉ឹម សុនិត្យ	លោក ផល ម៉ុនឆាយ
លោក លោក នន់ សុខណា	

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ	**អ្នករចនាក្រប**
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	លោក លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ទ្រឹស្តីចំនួន** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំណងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យា នៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន មេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ និង លំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាគិតដោយខ្លួនឯង ។ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៩ មីនា ២០១១

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ទ្រឹស្ដីចំនួន

លក្ខណៈគ្រឹះនៃទ្រឹស្តីចំនួន

I-ភាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$

1. សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ

គេតាង $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វដែល :

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \}$$

2. និយមន័យ

ឧបមាថា $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។ បើ $\mathbf{a = bq}$ ដែល $\mathbf{q}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វនោះគេថា $\mathbf{a}$ ជាពហុគុណនៃ $\mathbf{b}$ ឬ គេថា $\mathbf{b}$ ជាតួចែកនៃ $\mathbf{a}$ ឬ គេថា $\mathbf{b}$ ចែកដាច់ $\mathbf{a}$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\mathbf{b|a}$ អានថា $\mathbf{b}$ ចែកដាច់ $\mathbf{a}$ ។

3. លក្ខណៈភាពចែកដាច់

តាង $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។ គេមានលក្ខណៈគ្រឹះដូចខាងក្រោម :

ក. $\mathbf{a|a}$

ខ. បើ $\mathbf{b|a}$ និង $\mathbf{a|c}$ នោះ $\mathbf{b|c}$

គ. បើ $\mathbf{b|a}$ និង $\mathbf{a \neq 0}$ នោះ $\mathbf{|a| \geq |b|}$

ឃ. បើ $\mathbf{b|a}$ និង $\mathbf{b|c}$ នោះ $\mathbf{b|a\alpha + c\beta}$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ α, β ។

ង. បើ $\mathbf{b|a}$ និង $\mathbf{b|a \pm c}$ នោះ $\mathbf{b|c}$ ។

ច. បើ $\mathbf{b|a}$ និង $\mathbf{a|b}$ នោះ $\mathbf{|a| = |b|}$

ឆ. បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b}|a$

ជ. ចំពោះ $c\neq 0$, $b|a$ លុះត្រាតែ $bc|ac$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. $a|a$

យើងសម្គាល់ឃើញថា $a=1\times a$ ដូចនេះ $a|a$ ។

ខ. បើ $b|a$ និង $a|c$ នោះ $b|c$

បើ $b|a$ និង $a|c$ នាំឱ្យមាន $q_1,q_2\in Z$ ដែល $a=bq_1$ និង $c=aq_2$

គេទាញបាន $c=bq_1q_2$ ដូចនេះ $b|c$ ។

គ. បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $|a|\geq|b|$

បើ $b|a$ នាំឱ្យមាន $q\in Z$ ដែល $a=bq$ ហើយដោយសារតែ $a\neq 0$

នោះ $|q|\geq 1$ ហេតុនេះ $|a|=|q|.|b|\geq|b|$ ។

ឃ. បើ $b|a$ និង $b|c$ នោះ $b|a\alpha+c\beta$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឡាទីហ្វ α,β

បើ $b|a$ និង $a|c$ នាំឱ្យមាន $q_1,q_2\in Z$ ដែល $a=bq_1$ និង $c=bq_2$

គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឡាទីហ្វ α,β គេបាន $a\alpha+c\beta=(\alpha q_1+\beta q_2)b$

ដូចនេះ $b|a\alpha+c\beta$ ។

ង. បើ $b|a$ និង $b|a\pm c$ នោះ $b|c$

គេមាន $b|a$ និង $b|a\pm c$ នាំឱ្យមាន $q_1,q_2\in Z$ ដែល $a=bq_1$

និង $a\pm c=bq_2$ នោះគេទាញបាន $\pm c=bq_2-a=(q_2-q_1)b$

ដូចនេះ $b|c$ ។

ច. បើ $b|a$ និង $a|b$ នោះ $|a|=|b|$

បើ $b|a$ នោះ $|a|\ge|b|$ និង $a|b$ នោះ $|b|\ge|a|$ គ្រប់ $a,b\ne 0$

ដូចនេះ $|a|=|b|$ ។

ឆ. បើ $b|a$ និង $a\ne 0$ នោះ $\frac{a}{b}|a$

ដោយ $b|a$ នាំឱ្យ $a=bq$; $(q\in Z , q\ne 0)$ ឬ $\frac{a}{b}=q$

ដូចនេះ $q|a$ ឬ $\frac{a}{b}|a$ ។

ជ. ចំពោះ $c\ne 0$, $b|a$ លុះត្រាតែ $bc|ac$

ដោយ $c\ne 0$, $a\ne 0$ សមមូល $ac\ne 0$ ។

ដោយ $b|a$ នាំឱ្យ $a=bq$; $(q\in Z , q\ne 0)$

សមមូល $ac=bcq$

សមមូល $bc|ac$ ។

4. ចំនួនគត់គូ-ចំនួនគត់សេស និង លក្ខណៈ

ក. ចំនួនគត់គូមួយមានរាង $2k$ គ្រប់ចំនួនគតរ៏ឡាទីហ្វ k ។

ខ. ចំនួនគត់សេសមួយមានរាង $2k+1$ គ្រប់ចំនួនគតរ៏ឡាទីហ្វ k ។

គ. ផលបូករវាងពីចំនួនចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់គូ ។

ឃ. ផលបូករវាងពីរចំនួនគត់គូ ជាចំនួនគត់គូ ។

ង. ផលបូករវាងចំនួនគត់គូ នឹង ចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស ។

ច. ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស ។

ឆ. ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់ជាចំនួនគូ លុះត្រាតែមានចំនួនគត់មួយយ៉ាងតិចជាចំនួនគូ ។

៥. លក្ខណៈចែកដាច់នឹងមួយចំនួន

ក. មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **2** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង **2** បានន័យថាចំនួននោះត្រូវមានលេខចុងក្រោយជាលេខគូ $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន **714593168** ចែកដាច់នឹង **2** ព្រោះលេខខ្ទង់រាយ **8** ចែកដាច់នឹង **2** ។

ខ. មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **3** លុះត្រាតែផលបូកនៃគ្រប់លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង **3** ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន **97543215168** ចែកដាច់នឹង **3**

ព្រោះ $9+7+5+4+3+2+1+5+1+6+8=51=3\times 17$

ចែកដាច់នឹង **3** ។

គ. មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **4** លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងនៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង **4** ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន **77168245948** ចែកដាច់នឹង **4** ព្រោះវាមានលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយ $48=4\times 12$ ចែកដាច់នឹង **4** ។

ឃ. មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **5** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួននោះជាលេខ **0** ឬ **5** ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន **168277695** ចែកដាច់នឹង **5** ព្រោះមានលេខ **5** ចុងក្រោយ

ង. មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 25 លុះត្រាតែលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង 25 គឺ { 00 , 25 , 50 , 75 } ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន 2137486475 ចែកដាច់នឹង 25 ព្រោះវាមានលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយ 75 ចែកដាច់នឹង 25 ។

ច.មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 9 លុះត្រាតែផលបូកនៃគ្រប់លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង 9 ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន 1682751681 ចែកដាច់នឹង 9

ព្រោះ $1+6+8+2+7+5+1+6+8+1=45$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

ឆ.មួយចំំនចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែផលដករវាងផលបូកលេខខ្ទង់សេស និង ផលបូកលេខខ្ទង់គូនៃចំនួននោះ(រាប់ពីស្តាំទៅឆ្វេង) ចែកដាច់នឹង 11 ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន 2990108 ចែកដាច់នឹង 11

ព្រោះ $(8+1+9+2)-(0+0+9)=11$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

៦. ការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន

☞ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $1\ ,4\ ,9\ ,16\ ,25\ ,36\ ,.....,n^2\ ,....$ ហៅថាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6,.....,n$ ។

☞ គ្រប់ចំនួនដែលជាការេប្រាកដមានរាងតែពីរគត់គឺ $4m$ ឬ $4m+1$ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ។

ឧទាហរណ៍ : ការេប្រាកដនៃចំនួនគត់គូ $(2n)^2=4n^2$ មានរាង $4m$

ហើយការេប្រាកដនៃចំនួនគត់សេស $(2n+1)^2=4n(n+1)+1$

មានរាង $4m+1$ ។

☞ លេខខ្ទង់ចុងក្រោយបង្អស់នៃការេរបស់មួយចំនួនគត់គឺ $1, 4, 5, 6, 9$ ឬ 0 ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន **27945672168** មិនមែនជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយទេ ព្រោះវាមានលេខចុងក្រោយ **8** ។

ជាទូទៅគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមានលេខខ្ទង់ចុងក្រោយជាលេខ $2,3,7,8$ មិនមែនជាការេប្រាកដនៃមួយចំនួនគត់ទេ ។

សម្គាល់ :

ការេនៃគ្រប់ចំនួនគត់អាចមានលេខចុងក្រោយ $1, 4, 5, 6, 9$ ឬ 0

ប៉ុន្តែគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមានលេខចុងក្រោយ $1, 4, 5, 6, 9$ ឬ 0 មិនសុទ្ធតែជាការេប្រាកដនៃមួយចំនួនគត់ទេ ។

II‐ វិធីចែកបែបអឺគ្លីតក្នុង IN

1. ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង b ខុសពីសូន្យ នោះមានគូ (q,r) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមួយគត់ដែល $a = bq + r$ និង $0 \le r < b$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដើម្បីបង្ហាញអត្ថិភាពនៃ (q,r) យើងនឹងសិក្សាបីករណីដូចខាងក្រោម :

☞ ក្នុងករណីនេះយើងសន្មតថា $a < b$

យើងអាចយក $q = 0$ និង $r = a < b$ នោះគេបាន $(q,r) = (0,a)$ ។

☞ ក្នុងករណីនេះយើងសន្មតថា $a = b$

យើងអាចយក $q=1$ និង $r=0<b$ នោះគេបាន $(q,r)=(1,0)$ ។

☞ ក្នុងករណីចុងក្រោយនេះយើងសន្មតថា $a>b$

មានចំនួនចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $a<nb$ ។ យក q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានយ៉ាងតិចដែល $(q+1)b>a$ នោះ $qb\le a$ ។

យក $r=a-bq$ នោះ $a=bq+r$ និង $0\le r<b$

សរុបទាំងបីករណីខាងលើនេះយើងអាចសន្និដ្ឋានថា ចំពោះ a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង b ខុសពីសូន្យ នោះមានគូ (q,r) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $a=bq+r$ និង $0\le r<b$ ។

ជាបន្តទៅទៀតនេះយើងនឹងបង្ហាញភាពមានតែមួយគត់នៃគូ (q,r) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $a=bq+r$ និង $0\le r<b$ ។

ឧបមាថា $a=bq'+r'$ ដែល (q',r') ជាគូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $0\le r'<b$ ។ ដោយ $a=bq+r$ នោះគេបាន $bq'+r'=bq+r$

គេទាញបាន $r-r'=(q'-q)b$ នោះ $b\,|\,r-r'$

ហេតុនេះ $|r-r'|\ge b$ ឬ $|r-r'|=0$ ព្រោះ $0\le r<b$ និង $0\le r'<b$

នោះ $-b<r-r'<b$ ឬ $|r-r'|<b$ ។

ដូចនេះ $|r-r'|=0$ នាំឱ្យ $r=r'$ ហើយ $q=q'$ ។

២. និយមន័យ

ធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតក្នុងសំណុំ $\mathbb{IN}$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a}$ នឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{b}$ ដែល $\mathbf{b \neq 0}$ គឺរកគូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន$\mathbf{(q,r)}$ ដែល $\mathbf{a = bq + r}$ និង $\mathbf{0 \le r < b}$ ចំនួនគត់ $\mathbf{q}$ ហៅថាផលចែកនៃវិធីចែកនេះ ហើយ $\mathbf{r}$ ហៅថាសំណល់ ។

$\mathbf{b}$ ហៅថាតួចែក និង $\mathbf{a}$ ហៅថាតំណាងចែក ។

សម្គាល់

☞ បើ $\mathbf{0 \le a < b}$ នោះ $\mathbf{q = 0\,;\ r = a}$

☞ បើ $\mathbf{r = 0}$ នោះ $\mathbf{a = bq}$ ក្នុងករណីនេះ $\mathbf{a}$ ជាពហុគុណនៃ $\mathbf{b}$ ឬ $\mathbf{b}$ ចែកដាច់ $\mathbf{a}$ ហើយ $\mathbf{q}$ ជាផលចែកប្រាកដនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ។

ឧទាហរណ៍១: គេឱ្យ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេដឹងថា $\mathbf{n}$ ចែកនឹង $\mathbf{5}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{3}$ ។ បើគេចែកចំនួន $\mathbf{n}$ នោះនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{2}$ ។

ក. រកសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង $\mathbf{n}$ នឹង $\mathbf{35}$

ខ. កំណត់ចំនួន $\mathbf{n}$ បើគេដឹងថា $\mathbf{70432 < n < 70456}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង $\mathbf{n}$ នឹង $\mathbf{35}$

គេដឹងថា $\mathbf{n}$ ចែកនឹង $\mathbf{5}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{3}$ នាំឱ្យមាន $\mathbf{q_1 \ge 0}$ ដែល $\mathbf{n = 5q_1 + 3}$

ហើយដោយគេចែកចំនួន $\mathbf{n}$ នោះនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{2}$ នាំឱ្យមាន $\mathbf{q_2 \ge 0}$

ដែល $\mathbf{n = 7q_2 + 2}$ ។

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} n = 5q_1 + 3 \\ n = 7q_2 + 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} 21n = 105q_1 + 63 \\ 20n = 140q_2 + 40 \end{cases}$

គេទាញ $21n - 20n = (105q_1 + 63) - (140q_2 + 40)$

$$n = (3q_1 - 4q_2) \times 35 + 23 \quad \text{តាង } q = 3q_1 - 4q_2 \geq 0$$

គេបាន $n = 35q + 23$ ។

ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង n នឹង 35 គឺ $r = 23$ ។

ខ. កំណត់ចំនួន n បើគេដឹងថា $70432 < n < 70456$

គេបាន $70432 < 35q + 23 < 70456$ នោះ $2011 + \frac{24}{35} < q < 2012 + \frac{13}{35}$

គេទាញបាន $q = 2012$ ហើយ $n = 35 \times 2012 + 23 = 70443$ ។

ឧទាហរណ៍២: ចូររកសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីត រវាងចំនួន 2^{2012} និង 7

គេមាន $2^3 = 7 + 1$ នោះ $2^{2010} = (7+1)^{670}$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + ... + C(n,n)y^n$$

យក $x = 7$, $y = 1$ និង $n = 670$

គេបាន $2^{2010} = (7+1)^{670} = 7q + 1$ ដែល q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ។

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2^2 = 4$ គេបាន $2^{2012} = 7(4q) + 4$ ។

ដូចនេះ សំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីត រវាងចំនួន 2^{2012} និង 7 គឺ $r = 4$ ។

ឧទាហរណ៍៣: គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ។

គេដឹងថា $\mathbf{m}$ ចែកនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{2}$ ហើយ $\mathbf{n}$ ចែកនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{3}$ ។

ក. រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $\mathbf{m^2+n^2}$ នឹង $\mathbf{7}$

ខ. បង្ហាញថា $\mathbf{7}$ ចែកដាច់ $\mathbf{m^3+n^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $\mathbf{m^2+n^2}$ នឹង $\mathbf{7}$

តាមបម្រាប់ $\mathbf{m}$ ចែកនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{2}$ ហើយ $\mathbf{n}$ ចែកនឹង $\mathbf{7}$ ឱ្យសំណល់ $\mathbf{3}$

នាំឱ្យមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{q_1}$ និង $\mathbf{q_2}$ ដែល $\mathbf{m=7q_1+2}$ និង $\mathbf{n=7q_2+3}$

គេបាន $\mathbf{m^2+n^2=(7q_1+2)^2+(7q_2+3)^2}$

$$\mathbf{=7[7({q_1}^2+{q_2}^2)+2(2q_1+3q_2)+1]+6}$$

ដូចនេះ សំណល់នៃវិធីចែករវាង $\mathbf{m^2+n^2}$ នឹង $\mathbf{7}$ គឺ $\mathbf{r=6}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\mathbf{7}$ ចែកដាច់ $\mathbf{m^3+n^3}$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$\mathbf{(bq+r)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)(bq)^{n-k}r^k=b\sum_{k=0}^{n-1}[C(n,k)b^{n-k-1}q^{n-k}r^k]+r^n}$$

ឬ $\mathbf{(bq+r)^n=bq_n+r^n}$ ដែល $\mathbf{q_n=\sum_{k=0}^{n-1}[C(n,k)b^{n-k-1}q^{n-k}r^k]}$

តាមសមភាពខាងលើនេះគេអាចសរសេរ :

$\mathbf{m^3=(7q_1+2)^3=7q_1'+2^3=7(q_1'+1)+1}$ ដែល $\mathbf{q_1'\in IN}$

$\mathbf{n^3=(7q_1+3)^3=7q_2'+3^3=7(q_2'+3)+6}$ ដែល $\mathbf{q_2'\in IN}$

គេបាន $m^3+n^3=7(q_1'+q_2'+4)+7=7(q_1'+q_2'+5)$

ដូចនេះ $7\,|\,m^3+n^3$ ។

ឧទាហរណ៍៤: គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y និង z ។

គេដឹងថា x , y និង z ចែកនឹង 216 ឱ្យសំណល់រៀងគ្នា 3 , 4 និង 5 ។

កំណត់តម្លៃតូចជាងគេមួយនៃ n ដើម្បីឱ្យ $x^n+y^n+z^n$ ចែកដាច់នឹង 216 ។

តាមវិធីចែកបែបអឺក្លីតបើ x , y និង z ចែកនឹង 216 ឱ្យសំណល់រៀងគ្នា 3 , 4 និង 5

នោះគេមាន $q_1,q_2,q_3\in IN$ ដែល $x=216q_1+3$, $y=216q_2+4$

និង $z=216q_3+5$ ។ តាមទ្វេធាញូតុនគេអាចសរសេរ :

$x^n+y^n+z^n=216q_n+3^n+4^n+5^n$ ។

បើ $n=3$ នោះ $3^n+4^n+5^n=3^3+4^3+5^3=6^3=216$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចជាងគេនៃ n ដែល $216\,|\,x^n+y^n+z^n$ គឺ $n=3$ ។

III. វិធីចែកបែបអឺក្លីតក្នុង $\mathbb{Z}$

ទ្រឹស្តីបទ

a និង b ជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង b ខុសពីសូន្យ នោះវាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ q តែមួយគត់ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ r តែមួយគត់ដែល $a=bq+r$ និង $0\le r<|b|$ ។

សម្រាយទ្រឹស្តីបទនេះទាញចេញពីសម្រាយទ្រឹស្តីបទវិធីចែកបែបអឺក្លីតក្នុង IN រវាង $|a|$ និង $|b|$ ដែលយើងបានសិក្សារួចមកហើយ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : ចូររកផលចែក និង សំណល់នៃវិធីចែកបែអឺគ្លីតរវាង 75 នឹង -11

គេមាន $75=11\times 6+9$ ឬ $75=(-11)\times(-6)+9$

ដូចនេះគេទាញផលចែក $q=-6$ និងសំណល់ $r=9$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : ចូររកផលចែក និង សំណល់នៃវិធីចែកបែអឺគ្លីតរវាង -95 នឹង 7

គេមាន $95=7\times 13+4$

ឬ $-95=7\times(-13)-4=7\times(-13)-7+3=7\times(-14)+3$

ដូចនេះគេទាញផលចែក $q=-14$ និងសំណល់ $r=3$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣ :

ចូររកផលចែក និង សំណល់នៃវិធីចែកបែអឺគ្លីតរវាង -61 នឹង -19 ។

គេមាន $61=19\times 3+4$

ឬ $-61=-19\times 3-4=-19\times 3-19+15=-19\times 4+15$

ដូចនេះគេទាញផលចែក $q=4$ និងសំណល់ $r=15$ ។

IV~ចំនួនបឋម

1. *និយមន័យ*

☞ ចំនួនគត់ $p>1$ ហៅថាចំនួនបឋមលុះត្រាតែគ្មានចំនួនគត់ d ដែល $d>1$ និង $d|p$ ។

☞ បើ $p>1$ ជាចំនួនបឋមនោះ p មានតួចែករួមតែពីរគត់គឺ 1 និង p ខ្លួនឯង ។ ក្នុងករណីផ្សេងពីនេះ គេហៅថាចំនួនមិនបឋម ។

ឧទាហរណ៍ $2 , 3 ,5,7 , 11 ,13 , 17,19,23,...$ ជាចំនួនបឋម ។

2. *ទ្រឹស្តីបទ*

គ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$ មានតួចែកជាចំនួនបឋមយ៉ាងតិចមួយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

-បើ n ជាចំនួនបឋមនោះ n មានតួចែករួមពីរគឺ 1 និង n ខ្លួនឯង ។

-បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះយ៉ាងតិចមាន $d>1$ ជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n ដែល $n=bd$ និង $1<d\le b$ ។

សន្មតថា d មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះ d មានតួចែក d_1 មួយទៀតដែល $d_1<d$ ហេតុនេះ $d_1\,|\,d$ និង $d\,|\,n$ នោះ $d_1\,|\,n$ ដែល $d_1<d$ នោះវាផ្ទុយពី d ដែលជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n ។

ដូចនេះ d ជាតួចែកបឋមតូចបំផុតនៃ n ។

3. *ទ្រឹស្តីបទ*

គ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$ មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋម p ដែល $p\,|\,n$ និង $p^2\le n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $n>1$ មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះតាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ n មានតួចែកជាចំនួនបឋមតូចជាងគេមួយដែលតាងដោយ p ។

គេបាន $n=pq$ ដែល $p\le q$ (ព្រោះ p ជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n)

តាម $p\le q$ គេបាន $p^2\le pq=n$ ។

4. *ទ្រឹស្តីបទ*

គ្រប់ចំនួនគត់ $n > 1$ ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម p ដែល $p^2 \le n$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $n > 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនបឋម ។

តាមទ្រឹស្តីបទគេបាន $p \mid n$ និង $p^2 \le n$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា n ចែកមិនដាច់នឹង p ។ ដូចនេះការដែលឧបមាថា n មិនមែនជាចំនួនបឋម មិនពិតទេ ។

ដូចនេះ n ជាចំនួនបឋម (ពិត) ។

ឧទាហរណ៍ ចូរស្រាយថា 1009 ជាចំនួនបឋម ?

បន្ទាប់ពីធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាងចំនួន 1009 ជាមួយចំនួនបឋម $2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29$ និង 31 ឃើញថា 1009 ចែកមិនដាច់ជាមួយចំនួនបឋមទាំងនេះទេ ។ 31 ជាចំនួនបឋមធំជាងគេដែល $31^2 = 961 < 1009$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបាន 1009 ជាចំនួនបឋម ។

5. *ការបំបែកមួយចំនួនគត់ជាផលគុណកត្តាបឋម*

ក-អត្ថិភាព និង ភាពមានតែមួយគត់នៃការបំបែក

ទ្រឹស្តីបទ :

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ មិនបឋមអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមបាន ហើយបានតែមួយបែបគត់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $\mathbf{d}$ ជាតួចែកបឋមមួយនៃ $\mathbf{n}$ នោះគេបាន $\mathbf{n = dq}$ ដែល $\mathbf{q \in IN}$, $\mathbf{q > 1}$

-បើ $\mathbf{q}$ ជាចំនួនបឋម នោះ $\mathbf{n}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរកត្តាបឋមបាន ។

-បើ $\mathbf{q}$ មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះ $\mathbf{q}$ អាចមានតួចែក $\mathbf{q_1}$ មួយដែល $\mathbf{q = q_1 q_2}$ និង $\mathbf{q_2 > 1}$ ។

បើ $\mathbf{q_2}$ មិនមែនជាចំនយនបឋមនោះ$\mathbf{q_2}$ អាចមានតួចែក $\mathbf{q_3}$ មួយដែល $\mathbf{q_2 = q_3 q_4}$ និង $\mathbf{q_4 > 1}$ ។

តាមលំនាំដដែលៗនេះគេអាចបង្កើតស្វ៊ីតនៃផលចែក $\mathbf{q, q_1, q_2, q_3, ...}$ ជាស្វ៊ីតចុះដែលមានតួចុងក្រោយជាចំនួនបឋម ។

តាង $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ...,$\mathbf{p_k}$ ជាស្វ៊ីតតួចែកបឋមនៃ $\mathbf{n}$ ដូចនេះគេអាចសរសេរចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ ជាទម្រង់ $\mathbf{n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times .... \times p_k^{\alpha_k}}$

$\mathbf{p_k}$ ជាចំនួនបឋម និង $\mathbf{\alpha_k}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងសូន្យ ($\mathbf{k = 1, 2, 3...}$) ។

ឧទាហរណ៍ : បំបែកចំនួន $\mathbf{777}$ និង $\mathbf{2002}$ ជាផលគុណកត្តាបឋម ។

គេបាន $\mathbf{777 = 3 \times 7 \times 37}$ និង $\mathbf{2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13}$ ។

ខ-លក្ខខណ្ឌចែកដាច់

ទ្រឹស្តីបទ : ឧបមាថា $\mathbf{n}$ និង $\mathbf{p}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង $\mathbf{1}$ ។

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{p}$ ជាតួចែកមួយនៃ $\mathbf{n}$ លុះត្រាតែគ្រប់តួចែកបឋមនៃ $\mathbf{p}$ ជាតួចែកនៃ $\mathbf{n}$ និងនិទស្សន្តនៃតួចែកនីមួយៗនៃ $\mathbf{p}$ មិនធំជាងនិទស្សន្តនៃតួចែកដែលដូចរៀងគ្នារបស់ $\mathbf{n}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times .... \times p_k^{\alpha_k}$

p_k ជាចំនួនបឋម និង α_k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងសូន្យ ($k = 1,2,3...$) ។

បើ p ជាតួចែកមួយនៃ n នោះមាន $q \ge 1$ ដែល $n = p.q$ ។

ការបំបែក $p.q$ ជាផលគុណនៃកត្តាបឋមដូចគ្នានឹងការបំបែក n ជាកត្តាបឋមដែរ ។

ដូចនេះ p មិនអាចមានកត្តាបឋមផ្សេងទៀតក្រៅពី $p_1 , p_2 , p_3 , ...,p_k$ ទេ ។

គេអាចយក $p = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times .... \times p_k^{\beta_k}$ ដែល β_k ជាចំនួនគត់

ហើយ $0 \le \beta_k \le \alpha_k$ និង $k = 1,2,3...$ ។

គេមាន $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times .... \times p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i})$

$$n = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i - \beta_i}) \times \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\beta_i}) = p \times \prod_{i=1}^{n}(p_i^{\alpha_i - \beta_i})$$

ដូចនេះ p ជាតួចែកមួយនៃ n ។

គ-ចំនួននៃតួចែករបស់មួយចំនួន

តាង $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times .... \times p_k^{\alpha_k}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ

p_k ជាចំនួនបឋម និង α_k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងសូន្យ ($k = 1,2,3...$) ។

យើងបានដឹងរួចហើយថាបើ p ជាតួចែកមួយនៃ n នោះ p អាចសរសេរជាទូទៅ

$p = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times .... \times p_k^{\beta_k}$ ដែល β_k ជាចំនួនគត់

ហើយ $0 \le \beta_k \le \alpha_k$ និង $k = 1,2,3...$ ។

ហេតុនេះតួចែកមួយនៃ n បានមកពីការជ្រើសរើស **Liste** មួយនៃ

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,.....,\beta_k$ ដែលចំនួននីមួយៗនៃ β_k អាចយកពី $0,1,2,...,\beta_k$ ។

ដូចនេះដោយផ្អែកលើគោលការណ៍របាប់គេអាចសន្និដ្ឋានថាចំនួនតួចែកនៃ n

កំណត់ដោយ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1).....(\alpha_k+1)$ ។

ឧទាហរណ៍១ : ចូររកចំនួនតួចែកនៃ 31752 ?

គេមាន $31752 = 2^3\times 3^4\times 7^2$

ដូចនេះចំនួនតួចែកនៃ 31752 គឺ $(1+3)(1+4)(1+2)=60$ ។

ឧទាហរណ៍២ : ចូរកំណត់ n ដើម្បឱ្យចំនួនតួចែកនៃចំនួន $3^{2n+1}.4^n.7^{2n+2}$

ស្មើនឹង 1716 ។

គេមាន $3^{2n+1}.4^n.7^{2n+2} = 2^{2n+1}.2^{2n}.7^{2n+2}$ មានចំនួនតួចែកស្មើនឹង

$(2n+1)(2n+2)(2n+3)=1716=11\times 12\times 13$

គេទាញបាន $n=5$ ។

V-តួចែករួម និង ពហុគុណរួម

1. *តួចែករួមនៃពីចំនួនគត់ធម្មជាតិ*

❀ និយមន័យ

គេយក a និង b ជាពីរចំនួនកត់ធម្មជាតិ ។ គេថា d ជាតួចែករួមនៃ a និង b កាលណា d ជាតួចែកនៃ a ផង និង ជាតួចែកនៃ b ផង ។

ឧទាហរណ៍ :

7 ជាតួចែករួមនៃ 42 និង 70 ព្រោះ $7|42$ និង $7|70$ ។

2. *តួចែករួមធំបំផុតនៃពីចំនួនគត់ធម្មជាតិ*

❀ **និយមន័យ :**

គេយក $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

តួចែករួមធំបំផុតនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាងគេ ក្នុងចំណោមតួចែករួមនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដែលកំណត់តាងដោយ $\delta = \mathbf{GCD(a,b)}$ ។

ឧទាហរណ៍ : រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\mathbf{70}$ និង $\mathbf{84}$?

គេមាន $\mathbf{70 = 2\times 5\times 7}$ និង $\mathbf{84 = 2^2\times 3\times 7}$

ដូចនេះ $\delta = \mathbf{GCD(70,84) = 2\times 7 = 14}$ ។

3. *ចំនួនបឋមរវាងគ្នា*

❀ **និយមន័យ :**

ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាលុះត្រាតែ $\mathbf{GCD(a,a) = 1}$

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $\mathbf{42}$ និង $\mathbf{55}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ?

គេមាន $\mathbf{42 = 2\times 3\times 7}$ និង $\mathbf{55 = 5\times 11}$ គេបាន $\mathbf{GCD(42,55) = 1}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{42}$ និង $\mathbf{55}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

4. *លក្ខណៈ និង ទ្រឹស្ដីបទនៃតួចែករួមធំបំផុត*

គេយក $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

☞ បើ $\mathbf{a}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{b}$ នោះ $\mathbf{GCD(a,b) = b}$ ។

☞ បើ $\mathbf{a}$ ចែកមិនដាច់នឹង $\mathbf{b}$ នោះមានគូ $\mathbf{(q,r)}$ នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិតែមួយគត់

ដែល $\mathbf{a = bq + r}$ ឬ $\mathbf{r = a - bq}$ ។

តាង $\mathbf{d}$ ជាតួចែករួមមួយនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ នោះ $\mathbf{a = dq_1}$ និង $\mathbf{b = dq_2}$

គេបាន $\mathbf{r = a - bq = dq_1 - qdq_2 = d.(q_1 - qq_2)}$ ។

ដូចនេះគ្រប់តួចែករួមនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាតួចែកនៃសំណល់ $\mathbf{r}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ :

បើ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $\mathbf{a = bq + r}$ និង $\mathbf{0 \le r < b}$

នោះគេបាន $\mathbf{GCD(a,b) = GCD(b,r)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $\mathbf{\delta = GCD(a,b)}$ នាំឱ្យមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{x,y}$ ដែល $\mathbf{a = \delta x}$

និង $\mathbf{b = \delta y}$ ហើយ $\mathbf{GCD(x,y) = 1}$ ។

ដោយ $\mathbf{a = bq + r}$ នោះ $\mathbf{r = a - bq = (x - qy).\delta}$

ដោយ $\mathbf{GCD(x - qy, y) = 1}$ នោះ $\mathbf{GCD(b,r) = \delta = GCD(a,b)}$ ។

5. *អាល់កូរីតអឺគ្លីត (Algorithme d'Eclide)*

ឧបមាថា $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $\mathbf{a = bq + r}$ និង $\mathbf{0 \le r < b}$

នោះគេបាន $\mathbf{GCD(a,b) = GCD(b,r)}$

-បើ $\mathbf{r = 0}$ នោះ $\mathbf{b \mid a}$ នាំឱ្យ $\mathbf{GCD(a,b) = b}$ ។

-បើ $\mathbf{r > 0}$ និង $\mathbf{r \mid b}$ នោះ $\mathbf{GCD(a,b) = GCD(b,r) = r}$ ។

-បើ $\mathbf{b}$ ចែកមិនដាច់នឹង $\mathbf{r}$ នាំឱ្យមានគូ $\mathbf{(q_1, r_1)}$ ដែល $\mathbf{b = rq_1 + r_1}$

គេបាន $\mathbf{GCD(a,b) = GCD(b,r) = GCD(r, r_1)}$

-បើ $\mathbf{r}$ ចែកមិនដាច់នឹង $\mathbf{r_1}$ នាំឱ្យមានគូ $\mathbf{(q_2, r_2)}$ ដែល $\mathbf{r = r_1 q_2 + r_2}$

គេបាន $GCD(a,b)=GCD(b,r)=GCD(r,r_1)=GCD(r_1,r_2)$

តាមរបៀបដូចគ្នានេះគេបានលក្ខណៈទូទៅ :

$$GCD(a,b)=GCD(b,r)=GCD(r,r_1)=....=GCD(r_{k-1},r_k)$$

បើ $r_k \mid r_{k-1}$ នោះ $GCD(r_{k-1},r_k)=r_k$ ។

ប្រតិបត្តិវិធីចែកបន្តបន្ទាប់បែបនេះហៅថា អាល់កូរីតអឺគ្លីត ។

ទ្រឹស្តីបទ :

GCD នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** គឺជាសំណល់ចុងក្រោយបំផុតខុសពីសូន្យក្នុងវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា ឬ អាល់កូរីតអឺគ្លីត ។

សម្គាល់ : បើ $r_k = 1$ នោះ **a** និង **b** ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍១ :

ដោយប្រើ អាល់កូរីតអឺគ្លីតចូររកតួចែកធំបំផុតនៃពីរចំនួន **18480** និង **13104**

គេមាន $18480 = 13104\times 1 + 5376$

$$13104 = 2\times 5376 + 2352$$

$$5376 = 2\times 2352 + 672$$

$$2352 = 3\times 672 + 336$$

$$672 = 2\times 336 + 0$$

ដូចនេះ $GCD(18480;13104)=336$ ។

ឧទាហរណ៍២ :(**IMO 1959**)

ចូរស្រាយថា $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន :

$$21n+4=(14n+3)\times 1+(7n+1)$$

$$14n+3=(7n+1)\times 2+1$$

$$7n+1=(7n+1)\times 1+0$$

គេបាន $GCD(21n+4,14n+3)=1$

ហេតុនេះ $21n+4$ និង $14n+3$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាគ្រប់ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដូចនេះ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

ទ្រឹស្តីបទ :

សំណុំតួចែករួមនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ស្មើនឹងសំណុំតួចែករួមធំបំផុតរបស់វា ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន :

$$GCD(a,b)=GCD(b,r)=GCD(r,r_1)=....=GCD(r_{k-1},r_k)=r_k$$

ដែល $r_k \mid r_{k-1}$ ។

ដូចនេះ សំណុំតួចែករួមនៃ $a\ \&\ b=$ សំណុំតួចែករួមនៃ $b\ \&\ r=.....$

$=.$ សំណុំតួចែកនៃ $r_{k-1}\ \&\ r_k=r_k$ ដែល $r_k=GCD(a,b)$ ។

ឧទាហរណ៍ :

គេឱ្យចំនួន $\mathbf{a=74}$ និង $\mathbf{b=102}$ ។ ចូររកសំណុំតួចែករវាង $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$?

តាង $\mathbf{D(a)}$ និង $\mathbf{D(b)}$ ជាសំណុំតួចែកនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ។

ដោយ $\mathbf{a=74=1\times 2^2\times 3\times 7}$ និង $\mathbf{b=102=1\times 2\times 3\times 17}$

គេបាន $\mathbf{D(a)=\{1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,74\}}$

និង $\mathbf{D(b)=\{1,2,3,6,17,34,51,102\}}$

បើ $\mathbf{D(a,b)}$ ជាសំណុំតួចែករួមនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{D(a,b)=D(a)\cap D(b)=\{1,2,3,6\}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\mathbf{\delta=GCD(a,b)=2\times 3=6}$ នោះ $\mathbf{D(\delta)=\{1,2,3,6\}}$

ដូចនេះ $\mathbf{D(a,b)=D(\delta)=\{1,2,3,6\}}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ :

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a,b,k}$ និង គ្រប់តួចែករួម $\mathbf{d}$ នៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ គេមាន

ក. $\mathbf{GCD(ka,kb)=k.GCD(a,b)}$

ខ. $\mathbf{GCD(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=\frac{GCD(a,b)}{d}}$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. $\mathbf{GCD(ka,kb)=k.GCD(a,b)}$

តាង $\mathbf{\delta=GCD(a,b)}$ នាំឱ្យមានពីចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ បឋមរវាងគ្នាដែល

$\mathbf{a=\delta.x}$ និង $\mathbf{b=\delta.y}$ នោះ $\mathbf{ka=k.\delta.x}$ និង $\mathbf{k.\delta.y}$

គេបាន $\mathbf{GCD(ka,kb)=k.\delta=k.GCD(a,b)}$

ខ. $\mathbf{GCD(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{GCD(a,b)}{d}}$

តាមទ្រឹស្តបទខាងលើគេបាន :

$$\mathbf{d.GCD(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = GCD(\frac{a.d}{d},\frac{b.d}{d}) = GCD(a,b)}$$

ដូចនេះ $\mathbf{GCD(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{GCD(a,b)}{d}}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ :

a និង **b** ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិហើយ δ ជាតួចែករួមនៃ **a** និង **b** ។

δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ **a** និង **b** លុះត្រាតែ $\mathbf{\frac{a}{\delta}}$ និង $\mathbf{\frac{b}{\delta}}$ បឋមរវាងគ្នា ។

-ឧបមាថា $\mathbf{\frac{a}{\delta}}$ និង $\mathbf{\frac{b}{\delta}}$ បឋមរវាងគ្នានោះ $\mathbf{GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = 1}$

គេបាន $\mathbf{\delta.GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = 1.\delta = \delta}$ ដោយ $\mathbf{\delta.GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = GCD(a,b)}$

នោះគេបាន $\mathbf{GCD(a,b) = \delta}$ ។

-បើ $\mathbf{GCD(a,b) = \delta}$ នោះ $\mathbf{\frac{GCD(a,b)}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = 1}$

តែ $\mathbf{GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = \frac{GCD(a,b)}{\delta}}$ នោះ $\mathbf{GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = 1}$ នោះ $\mathbf{\frac{a}{\delta}}$ និង $\mathbf{\frac{b}{\delta}}$ ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា ។

6. *សមភាពបឺស៊ូ (Bezout’s Indentity)*

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ u និង v ដែល

$au + bv = GCD(a,b)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន :

$a = bq_1 + r_1$ ឬ $r_1 = a - bq_1$ ដែល $0 \le r_1 < b$

$b = r_1q_2 + r_2$ ឬ $r_2 = b - r_1q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2)$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \text{ ឬ } r_3 = r_1 - r_2q_3$$
$$= a - bq_1 + aq_2q_3 - bq_3(1 + q_1q_2)$$
$$= a(1 + q_2q_3) + b(-q_1 - q_3 - q_1q_2q_3)$$

យើងសង្កេតឃើញថា $r_1 = a\alpha_1 + b\beta_1$ ដែល $\alpha_1 = 1 , \beta_1 = -q_1$

$r_2 = a\alpha_2 + b\beta_2$ ដែល $\alpha_2 = -q_2 , \beta_2 = 1 + q_1q_2$

$r_3 = a\alpha_3 + b\beta_3$ ដែល $\alpha_3 = 1 + q_2q_3$

$\beta_3 = -q_1 - q_3 - q_1q_2q_3$ ។

ឧបមាថា $r_k = a\alpha_k + b\beta_k$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $r_{k+1} = a\alpha_{k+1} + b\beta_{k+1}$ ពិតទៀត ។

គេមាន $r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}$ នោះ $r_{k+1} = r_{k-1} - r_kq_{k+1}$

តែតាមការឧបមាគេមាន $r_k = a\alpha_k + b\beta_k$ និង $r_{k-1} = a\alpha_{k-1} + b\beta_{k-1}$

គេបាន $r_{k+1} = a\alpha_{k-1} + b\beta_{k-1} - a\alpha_k q_{k+1} - b\beta_k q_{k+1}$

$$r_{k+1} = a(\alpha_{k-1} - \alpha_k q_{k+1}) + b(\beta_{k-1} - \beta_k q_{k+1})$$

ដោយយក $\alpha_{k+1} = \alpha_{k-1} - \alpha_k q_{k+1}$ និង $\beta_{k+1} = \beta_{k-1} - \beta_k q_{k+1}$

គេបាន $r_{k+1} = a\alpha_{k+1} + b\beta_{k+1}$ ពិត ។

ដូចនេះ $GCD(a,b) = r_k = a\alpha_k + b\beta_k$ ។

សរុបមកចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ u និង v ដែល

$au + bv = GCD(a,b)$ ។

7. *ទ្រឹស្តីបទបឺស៊ូ (Bezout's theory)*

ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b បឋមរវាងគ្នាលុះត្រាតែមានពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ u និង v ដែល $au + bv = 1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាម ***Bezout's Indentity***

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ u និង v ដែល

$au + bv = GCD(a,b)$ ។

-បើ $au + bv = 1$ នោះ $GCD(a,b) = 1$ នាំឱ្យ a និង b បឋមរវាងគ្នា ។

-បើ a និង b បឋមរវាងគ្នានោះ $GCD(a,b) = 1$ ហើយ $au + bv = 1$ ។

ឧទាហរណ៍១ : ចូរស្រាយពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្តគ្នាជាចំនួនបឋម ។

តាង $\mathbf{n}$ និង $\mathbf{n+1}$ ជាពីរចំនួនគត់បន្តគ្នា ។

ដោយ $\mathbf{(n+1)\times 1+n\times(-1)=n+1-n=1}$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ**Bezout**

គេបាន $\mathbf{n}$ និង $\mathbf{n+1}$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ ២ : **(IMO 1959)**

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ បង្ហាញថា $\mathbf{\dfrac{21n+4}{14n+3}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

គេមាន $\mathbf{(14n+3)(3)+(21n+4)(-2)=42n+9-42n-8=1}$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ**Bezout** គេបាន $\mathbf{21n+4}$ និង $\mathbf{14n+3}$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ។

ដូចនេះ $\mathbf{\dfrac{21n+4}{14n+3}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

8. *ទ្រឹស្តីបទហ្គោស (Gauss's theory)*

បើផលគុណ $\mathbf{ab}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{c}$ ហើយ $\mathbf{c}$ និង $\mathbf{a}$ បឋមរវាងគ្នានោះ $\mathbf{b}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{c}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $\mathbf{c}$ និង $\mathbf{a}$ បឋមរវាងគ្នានោះ $\mathbf{GCD(c,a)=1}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ **Bezout** នាំឱ្យមានចំនួនកត់រីឡាទីហ្វ $\mathbf{u}$ និង $\mathbf{v}$ ដែល $\mathbf{au+cv=1}$

នាំឱ្យ $\mathbf{abu+bcv=b}$ ។

ដោយ $\mathbf{c\,|\,ab}$ នោះ $\mathbf{c\,|\,abu+bcv}$ ឬ $\mathbf{c\,|\,b}$ ។

ដូចនេះ បើ $c\,|\,ab$ និង $GCD(a,c)=1$ នោះ $c\,|\,b$ ។

ឧទាហរណ៍ :

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើ $GCD(n+1;6)=1$ នោះចូរស្រាយថា :

ចំនួន $2n^2+n$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

គេមាន $n(n+1)(2n+1)=6(1^2+2^2+...+n^2)$

គេបាន $6\,|\,n(n+1)(2n+1)$ តែតាមបម្រាប់ $GCD(n+1,6)=1$

តាមទ្រឹស្តីបទហ្គោសគេបាន $6\,|\,n(2n+1)$ ។

វិបាក :

បើ $a\,|\,n$, $b\,|\,n$ និង $GCD(a,b)=1$ នោះ $ab\,|\,n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $a\,|\,n$ នោះមាន $q\in IN$ ដែល $n=aq$

ហើយ $b\,|\,n$ នោះ $b\,|\,aq$

ដោយ $GCD(a,b)=1$ នោះមាន $q'\in IN$ ដែល $q=bq'$

ហេតុនេះ $n=aq=abq'$ នាំឱ្យ $ab\,|\,n$ ។

ឧទាហរណ៍ : (Eötvös Competition 1899)

Show that $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ is divisible by 1897

គេមាន $1897=7\times 271$ ដែល $GCD(7,271)=1$

តាមសមភាព $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+....+b^{n-1})$

$$2903^n-803^n=(2903-803)q_1=7\times 300q_1$$

$$464^n-261^n=(464-261)q_2=7\times 29q_2$$

គេបាន $2903^n - 803^2 - 464^n + 261^n = 7(300q_1 - 29q_2)$

នាំឱ្យ $7 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $2903^n - 464^n = (2903 - 464)q_3 = 271 \times 9q_3$

និង $803^n - 261^n = (803 - 261)q_4 = 271 \times 2q_4$

នាំឱ្យ$271 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ។

ដូចនេះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ។

VI~ពហុគុណរួមតូចបំផុត

1. *ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ*

ក. និយមន័យ :

គេយក a និង b ជាពីរចំនួនកត់ធម្មជាតិ ។ ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ a និង b គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលជាពហុគុណរួមវិជ្ជមាន និងតូចជាងគេនៃ a និង b ។

គេកំណត់តាង$\mu = \mathrm{LCM}(a, b)$ ជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។

ឧទាហរណ៍ : $\mathrm{LCM}(20, 30) = 60$ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ :

គ្រប់ពហុគុណនៃ $\mu = \mathrm{LCM}(a,b)$ គឺជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

បើ $\mu = \mathrm{LCM}(a,b)$ នាំឱ្យមានគូ (α, β) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល :

$\mu = a\alpha = b\beta$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k គេមាន $k\mu$ ជាពហុគុណនៃ μ ។

តាមសមភាព $\mu = a\alpha = b\beta$ គេបាន $k\mu = a(k\alpha) = b(k\beta)$

សមភាពចុងក្រោយនេះបញ្ជាក់ថា $k\mu$ គឺជាពហុគុណនៃ a និងជាពហុគុណនៃ b ។

ឧទាហរណ៍ : $LCM(20,30) = 60$ ហើយ 360 ជាពហុគុណនៃ 60

ដូចនេះ 360 ជាពហុគុណរួមនៃ 20 និង 30 ព្រោះ $360 = 20\times 18$

និង $360 = 30\times 12$ ។

2. *លក្ខណៈនៃពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ*

តាង a , b និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង d ជាតួចែកនៃ a និង b ។

គេមានលក្ខណៈសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម :

ក. $LCM(a,b) = LCM(b,a)$

ខ. $LCM(a,a) = a$

គ. $LCM(1,a) = a$

ឃ. $LCM(a,na) = na$

ង. $LCM(na,nb) = n.LCM(a,b)$

ច. $LCM(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{LCM(a,b)}{d}$

3. *ទំនាក់ទំនងរវាង* $LCM(a,b)$ *និង* $GCD(a,b)$

ក. ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា :

ទ្រឹស្តីបទ :

បើ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នានោះ $LCM(a,b) = a.b$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $\mu = \mathbf{LCM(a,b)}$ នាំឱ្យមានគូ (α,β) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល :

$\mu = \mathbf{a}\alpha = \mathbf{b}\beta$ ដោយ $\mathbf{GCD(a,b)=1}$ នោះ $\mathbf{b}\,|\,\alpha$ នាំឱ្យមាន λ មួយ

ដែល $\alpha = \lambda\mathbf{b}$ ។ ហេតុនេះ $\mu = \mathbf{a}\alpha = \mathbf{b}\beta = \lambda\mathbf{ab}$ ។

ដោយ $\mu = \mathbf{LCM(a,b)}$ តូចបំផុតនោះ $\lambda = 1$ ។ដូចនេះ$\mathbf{LCM(a,b)=ab}$

ខ. ផលគុណរវាង LCM(a,b) និង GCD(a,b) :

ទ្រឹស្តីបទ :

បើ **a** និង **b** ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះគេបាន :

$\mathbf{GCD(a,b)\times LCM(a,b) = a\times b}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $\mu = \mathbf{LCM(a,b)}$

បើ $\mathbf{GCD(a,b)} = \delta$ នោះមានគូ (α,β) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា

ដែល $\mathbf{a} = \alpha\delta$ និង $\mathbf{b} = \beta\delta$ ។

គេបាន $\mu = \mathbf{LCM(a,b)} = \mathbf{LCM}(\alpha\delta\,,\,\beta\delta) = \delta\times\mathbf{LCM}(\alpha,\beta)$

ដោយ $\mathbf{GCD}(\alpha,\beta) = 1$ នោះ $\mathbf{LCM}(\alpha,\beta) = \alpha\times\beta$

ហេតុនេះ $\mu = \mathbf{LCM(a,b)} = \delta\times\alpha\beta = \dfrac{(\alpha\delta).(\beta\delta)}{\delta} = \dfrac{\mathbf{ab}}{\delta}$

គេទាញ $\mu\times\delta = \mathbf{a\times b}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{GCD(a,b)\times LCM(a,b) = a\times b}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : ចូរដោះស្រាយក្នុង $\mathbf{IN}^2$ នូវប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} GCD(x,y) = 28 \\ LCM(x,y) = 420 \end{cases}$$

គេមាន $xy = GCD(x,y) \times LCM(x,y) = 28 \times 420 = 11760$

ដោយ $GCD(x,y) = 28$ នាំឱ្យមានគូ (α,β) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាដែល $x = 28\alpha$ និង $y = 28\beta$

គេបាន $xy = 28^2\alpha\beta = 11760$ នោះ $\alpha\beta = \dfrac{11760}{784} = 15$

គេទាញ $(\alpha,\beta) \in \{(3,5);(5,3);(1,15);(15,1)\}$ ។

ដោយ $x = 28\alpha$ និង $y = 28\beta$ នោះគេបានគូចម្លើយ :

$(x,y);(y,x) \in \{(84,140);(28,420)\}$ ។

ឧទាហរណ៍២ : ចូរដោះស្រាយក្នុង IN^2 នូវប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x + y = 276 \\ LCM(x,y) = 1440 \end{cases}$$

តាង $GCD(x,y) = \delta$ នោះមានគូ (α,β) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាដែល $x = \alpha\delta$ និង $y = \beta\delta$ ។

គេបាន $x + y = \alpha\delta + \beta\delta = 276$ នោះ $\alpha + \beta = \dfrac{276}{\delta}$ (1)

ដោយ $xy = GCD(x,y) \times LCM(x,y)$

គេបាន $\alpha\beta\delta^2 = 1440\delta$ នោះ $\alpha\beta = \dfrac{1440}{\delta}$ (2)

ចែកសមីការ (2) & (1) អង្គ និង អង្គ គេបាន $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{1440}{276} = \dfrac{120}{23}$ (3)

ដោយ $\mathbf{GCD(\alpha,\beta)=1}$ នោះ $\mathbf{GCD(\alpha\beta,\alpha+\beta)=1}$ ។

តាម **(3)** គេទាញបាន $\mathbf{\alpha\beta=120}$ និង $\mathbf{\alpha+\beta=23}$ ។

គេបានគូចម្លើយ $\mathbf{\alpha=8\ ,\ \beta=15}$ ឬ $\mathbf{\alpha=15\ ,\beta=8}$ និង $\mathbf{\delta=\frac{1440}{\alpha\beta}=12}$

ដូចនេះ $\mathbf{x=96\ ,\ y=180}$ ឬ $\mathbf{x=180\ ,\ y=96}$ ។

គ. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ បើ $\mathbf{LCM(a,b)=\mu}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{\frac{\mu}{a}}$ និង $\mathbf{\frac{\mu}{b}}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $\mathbf{\delta=GCD(a,b)}$

-បើ $\mathbf{LCM(a,b)=\mu}$ នោះ $\mathbf{\mu\times\delta=a\times b}$

គេទាញបាន $\mathbf{\frac{\mu}{a}=\frac{b}{\delta}}$ និង $\mathbf{\frac{\mu}{b}=\frac{a}{\delta}}$

ដោយ $\mathbf{\delta=GCD(a,b)}$ នោះ $\mathbf{GCD(\frac{a}{\delta}\ ,\ \frac{b}{\delta})=1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{\frac{a}{\delta}}$ និង $\mathbf{\frac{b}{\delta}}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ។

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{\mu}{a}}$ និង $\mathbf{\frac{\mu}{b}}$ ក៏ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

-ឧបមាថា $\mathbf{\mu'}$ ជាពហុគុណនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដែល $\mathbf{\frac{\mu'}{a}}$ និង $\mathbf{\frac{\mu'}{b}}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

យើងនឹងស្រាយថា $\mathbf{\mu'}$ ជា **LCM** នៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ។

$\mathbf{\mu'}$ ជាពហុគុណនៃ $\mathbf{\mu=LCM(a,b)}$ នាំឱ្យមាន $\mathbf{\lambda\in IN}$ ដែល $\mathbf{\mu'=\lambda\mu}$

ហើយ $\frac{\mu'}{a}=\lambda\frac{\mu}{a}$ និង $\frac{\mu'}{b}=\lambda\frac{\mu}{b}$ នោះ λ ជាតួចែកនៃ $\frac{\mu'}{a}$ និង $\frac{\mu'}{b}$

ដោយ $\frac{\mu'}{a}$ និង $\frac{\mu'}{b}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ $\lambda=1$ ។

ដូចនេះ $\mu'=\mu=\mathbf{LCM(a,b)}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : ចូរដោះស្រាយក្នុង $\mathbf{IN}^2$ នូវប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases}xy=1512\\ LCM(x,y)=252\end{cases}$$

តាង $a=\frac{LCM(x,y)}{x}=\frac{252}{x}$ និង $b=\frac{LCM(x,y)}{y}=\frac{252}{y}$

គេបាន $GCD(a,b)=1$ នោះ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

គេមាន $ab=\frac{252^2}{xy}=\frac{252^2}{1512}=42$

គេទាញបាន $(a,b);(b,a)=\{(6,7);(2,21);(3,14);(1,42)\}$

ដោយ $a=\frac{252}{x}$ នោះ $x=\frac{252}{a}$ និង $b=\frac{252}{y}$ នោះ $y=\frac{252}{a}$

ដូចនេះ $(x,y);(y,x)=\{(42,36);(126,12);(84,18);(252,6)\}$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : ចូរដោះស្រាយក្នុង $\mathbf{IN}^2$ នូវប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases}x+y=36\\ LCM(x,y)=105\end{cases}$$

តាង $a=\frac{LCM(x,y)}{x}=\frac{105}{x}$ និង $b=\frac{LCM(x,y)}{y}=\frac{105}{y}$

គេបាន $GCD(a,b)=1$ នោះ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

មាន $x+y=\frac{105}{a}+\frac{105}{b}=36$ ឬ $\frac{a+b}{ab}=\frac{36}{105}=\frac{12}{35}$

គេទាញបាន $a+b=12$ និង $ab=35$ នោះ $a=5,b=7$ ឬ $a=7,b=5$

ដូចនេះ $x=21,y=15$ ឬ $x=15,y=21$ ។

VII. Modular Arithmetic

1. *និយមន័យ ភាពសមមូល*

គេយក a , b និង r ជាចំនួនគត់ដែល $b\neq 0$ ។

គេកំណត់សរសេរ $a\equiv r\pmod b$ អានថា a សមមូល r តាម b មានន័យថា $b\mid a-r$ (b ចែកដាច់ $a-r$) ឬមានន័យម្យ៉ាងទៀតថា a និង r មានសំណល់ដូចគ្នាពេលចែកជាមួយb ។

បើ $a-r$ ចែកមិនដាច់នឹង b នោះគេកំណត់សរសេរ $a\not\equiv r\pmod b$ ។

$a\equiv r\pmod b$ កាលណា r ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង a និង b ។

ឧទាហរណ៍ : ក. $17\equiv 3\pmod 7$ ព្រោះ $17=7\times 2+3$

ខ. $38\equiv 5\pmod{11}$ ព្រោះ $38=11\times 3+5$

2. *លក្ខណៈគ្រឹះ និង ទ្រឹស្តីបទ នៃភាពសមមូល*

ក. $a\equiv a\pmod b$

ខ. បើ $a\equiv r\pmod b$ និង $r\equiv s\pmod b$ នោះ $a\equiv s\pmod b$

គ. បើ $a\equiv r\pmod b$ នោះ $r\equiv a\pmod b$

ឃ. បើ $a_1 \equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$

នោះ $a_1 + a_2 \equiv r_1 + r_2 \pmod b$ និង $a_1 - a_2 \equiv r_1 - r_2 \pmod b$

ង. បើ $a \equiv r \pmod b$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ λ គេបាន $\lambda a \equiv \lambda r \pmod b$

ច. បើ $a_1 \equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$

នោះ $a_1 a_2 \equiv r_1 r_2 \pmod b$ ។

ឆ. បើ $a \equiv r \pmod b$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k \geq 1$ គេបាន $a^k \equiv r^k \pmod b$

ជ. បើ $\mu = LCM(b_1, b_2, ..., b_n)$ ហើយ $a \equiv r \pmod{b_k}; k = 1, 2, ...$

លុះត្រាតែ $a \equiv r \pmod \mu$ ។

ឈ. យក f ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

$a \equiv r \pmod b$ នោះ $f(a) \equiv f(r) \pmod b$ ។

2. *គូរ៉ូលែ ក្នុងភាពសមមូល*

គូរ៉ូលែទី១

គេយក p ជាចំនួនបឋម ។

បើ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ដែល $ab \equiv 0 \pmod p$ នោះគេទាញបាន

$a \equiv 0 \pmod p$ ឬ $b \equiv 0 \pmod b$ ។

គូរ៉ូលែទី២

យក m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ a , b , c ជាបីចំនួនគត់ដែល $c \neq 0$ ។

បើ $ac \equiv bc \pmod m$ នោះ $a \equiv b \quad \left(\bmod \dfrac{m}{\gcd(c, m)}\right)$

ករណីទី៣

តាង $\mathbf{m}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់បឋមទៅនឹង $\mathbf{m}$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ បើ $\mathbf{a^x \equiv b^x \pmod m}$

និង$\mathbf{a^y \equiv b^y \pmod m}$ នោះ $\mathbf{a^{GCD(x,y)} \equiv b^{GCD(x,y)} \pmod m}$

3. *សំណល់ក្នុងវិធីចែក*

ខាងក្រោមនេះជាឧទាហរណ៍នៃការសិក្សាអំពីសំណល់នៃវិធីចែករវាងចំនួនរាង $\mathbf{n^k}$ ជាមួយចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{b}$ ណាមួយ ។

1. $\mathbf{n^2 \equiv 0}$ ឬ $\mathbf{1 \pmod 2}$
2. $\mathbf{n^2 \equiv 0}$ ឬ $\mathbf{1 \pmod 3}$
3. $\mathbf{n^2 \equiv 0}$ ឬ $\mathbf{\pm 1 \pmod 5}$
4. $\mathbf{n^2 \equiv 0}$ ឬ $\mathbf{1}$ ឬ $\mathbf{4 \pmod 8}$
5. $\mathbf{n^3 \equiv 0}$ ឬ $\mathbf{\pm 1 \pmod 9}$

VIII_គោលការណ៍នៃប្រព័ន្ធរាប់

1. *និយមន័យ*

✍ ប្រពន្ធ័រាប់ ជាសំណុំនៃការសន្មតទាំងអស់ដែលសម្រាប់សរសេរចំនួនគត់ ។

✍ គោលនៃប្រពន្ធ័រាប់ ជាចំនួនលេខដែលប្រើក្នុងប្រពន្ធ័នោះ ។

✍ ក្នុងប្រពន្ធ័រាប់គោល $\mathbf{x}$ ដែល $\mathbf{x}$ ជាចំនួនគត់ធំជាង $\mathbf{1}$ ដាច់ខាត ។

គេប្រើ $\mathbf{x}$ លេខ គឺ : $\mathbf{\{ 0 , 1 , 2 , 3 , ..., (x-1) \}}$ ។

✍ តាមសន្មតចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាងគោលដែលតាងលេខតែមួយ ។

-ប្រពន្ធ័គោល **2** ប្រើលេខ **0** និង **1** ដែលតាងចំនួនសូន្យ និង មួយ ។

-ប្រពន្ធ័គោល **10** ប្រើលេខ **0 , 1 ,2 , 3 , 4 ,5 ,6 , 7 ,8** និង **9** ដែលតាង ចំនួន : សូន្យ-មួយ-ពីរ-បី-បួន-ប្រាំ-ប្រាំមួយ-ប្រាំពីរ-ប្រាំបី និង ប្រាំបួន ។

2. *ការសរសេរមួយចំនួននៅក្នុងប្រពន្ធ័រាប់គោល* x

ក. អត្ថិភាព :

ចំនួនសញ្ញាប្រើគឺ $0,1,2,3,....,(x-1)$

ដែល $0<1<2<3<...<x-1$ ។ យក N ជាចំនួនគត់ណាមួយ ។

✍ បើ $N<x$ នោះ N តាងដោយសញ្ញាណាមួយក្នុងចំណោមលេខដូចខាងលើ ។

✍ បើ $N\ge x$ នោះមានគូ (q_1 ,r_o) ដែល $N=q_1x+r_o$, $0\le r_o<x$

ដែល r_0 តាងឱ្យលេខណាមួយក្នុងចំណោមលេខខាងលើ និង $q_1\neq 0$ ។

a/ បើ $q_1<x$ នោះមានសញ្ញាមួយសម្រាប់សម្គាល់ q_1 ដែលគេសន្មតសរសេរ :

$$N=q_1x+r_0=\overline{q_1r_o}$$ ។

ឧទាហរណ៍ :

ក្នុងប្រពន្ធ័គោលដប់ $N=79$ មានន័យថា$N=\overline{79}=7x+9$

ដែល x ស្មើនឹង 10 ។

ក្នុងប្រពន្ធ័គោលប្រាំពីរ $N=24$ មានន័យថា$N=\overline{24}=2x+4$

ដែល x ស្មើនឹង 7 ។

b/ បើ $q_1\ge x$ នោះមានគូ (q_2 ,r_1) ដែល $q_1=q_2x+r_1$

ដែល $q_2\neq 0$, $0\le r_1<x$ ហើយ :

$$N = (q_2x + r_1)x + r_o = q_2x^2 + r_1x + r_0 = \overline{q_2r_1r_o}$$ ។

c/ បើ $q_2 \ge x$ នោះមានគូ (q_3 , r_2) ដែល $q_2 = q_3x + r_2$

ដែល $q_3 \ne 0$, $0 \le r_2 < x$ ហើយ :

$$N = (q_3x + r_2)x^2 + r_1x + r_0$$

$$= q_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_o$$

$$= \overline{q_3r_2r_1r_0}$$

យើងធ្វើរបៀបនេះដដែលៗ រហូតដល់ពេលដែលបានផលចែក $q_n < x$ នោះគេបាន

$$N = q_nx^n + r_{n-1}x^{n-1} + ... + r_1x + r_0$$

$$= \overline{q_nr_{n-1}r_{n-2}.....r_2r_1r_o}$$

ដែល $r_0 , r_1 , r_2 ,...., r_{n-1}$ និង q_n សុទ្ធតែជាលេខដែលតូចជាង x ដាច់ខាត ។

ក្នុងន័យនេះគេអាចសរសេរ :$\begin{cases} q_n \le x-1 \\ r_{n-1} \le x-1 \\ ----- \\ ----- \\ r_0 \le x-1 \end{cases}$

គេបាន $N \le (x-1)x^n + (x-1)x^{n-1} + ... + (x-1)x + (x-1)$

$$N \le x^{n+1} - 1 < x^{n+1}$$

ដូចនេះ $N < x^{n+1}$ ។

ឧទាហរណ៏

ក្នុងប្រពន្ធ័គោល 5 ចំនួន $N = \overline{24031} < 5^6 = 15625$

ព្រោះ $\overline{24031} = 2\times 5^4 + 4\times 5^3 + 0\times 5^2 + 3\times 5^1 + 1$

$= 1250 + 500 + 0 + 15 + 1 = 1766$ ។

ខ. ភាពមានតែមួយ :

យើងបានសិក្សារួចមកហើយថាវិធីចែកអឺគ្លីតរវាង N នឹង x វាផ្តល់គូ (q_1, r_o) តែមួយគត់ដែល $N = q_1 x + r_0$, $0 \le r_0 < x$ ។ អាស្រ័យហេតុនេះគេក៏បានគូ $(q_2, r_1), (q_3, r_2), ..., (q_n, r_{n-1})$ តែមួយគត់ដែរ ។

ដូចនេះចំនួននីមួយៗនៃបណ្តាចំនួន $r_0, r_1, ..., r_{n-1}, q_n$ មានតែមួយគត់ចំពោះចំនួនគត់ N គឺបានន័យថាគេអាចសរសេរ N បានតែមួយបែបគត់ ។

គ. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ N មានតំណាងតែមួយគត់នៅក្នុងប្រពន្ធ័របាប់នៃគោល x ។

ជាពិសេស ចំពោះគ្រប់គោល x គេបាន $x = 1.x + 0 = \overline{10}$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់គោល x គេបាន :

$$N = \overline{q_n r_{n-1} .....r_1 r_0} = q_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + ... + r_1 z + r_0$$

ឬគេអាចសរសេរ :

$$N = (q_n x^{n-k} + r_{n-1} x^{n-k-1} + ... + r_k) x^k + (r_{k-1} x^{k-1} + ... + r_0)$$

តាង $Q = q_n x^{n-k} + ... + r_k ; R = r_{k-1} x^{k-1} + ... + r_0$

គេបាន $N = Q.x^k + R$ ដែល $R = \overline{r_{k-1} r_{k-2} ....r_0} < x^k$ ។

ដូចនេះ **Q** ជាផលចែក និង **R** ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង **N** នឹង x^k ។

ឃ. កំណត់សម្គាល់

គេកំណត់សម្គាល់ $(N)_a$: បានន័យថា **N** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល **a** ហើយ **a** សរសេរក្នុងប្រពន្ធ័គោល **10** ។

បើគ្មាន **a** បានន័យថា **N** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10** ។

ឧទាហរណ៍ ១: គេសរសេរ $(2133042)_5$ មានន័យថាសរសេរក្នុងប្រពន្ធ័គោល **5** ។

បើគេសរសេរ **2133042** មានន័យថាគេសរសេរក្នុងប្រពន្ធ័គោល **10** ។

ឧទាហរណ៍២ : ចូរសរសេរ $(21304)_6$ ក្នុងប្រពន្ធ័គោល **10** ។

គេបាន $(21304)_6 = 2\times 6^4 + 1\times 6^3 + 3\times 6^2 + 0\times 6 + 4 = 2920$ ។

IX~ទ្រឹស្តីបទក្នុងលក្ខណៈភាពចែកដាច់នៃមួយចំនួន

1. *ភាពចែកដាច់នឹង* 2 *ឬ នឹង* 5

ទ្រឹស្តីបទ :

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **2** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង **2** បានន័យថាចំនួននោះត្រូវមានលេខចុងក្រោយជាលេខគូ **{0 , 2 , 4 , 6 , 8}** ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **5** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួននោះជាលេខ **0** ឬ **5** ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $N = \overline{a_n a_{n-1} .....a_2 a_1 a_0}$ ជាចំនួនគត់សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10** ។

គេអាចសរសេរចំនួន **N** ជា $N = \overline{a_n a_{n-1} ....a_2 a_1} \times 10 + a_o$

គេបាន $N \equiv a_0 \pmod{2}$ និង $N \equiv a_0 \pmod{5}$

ដូចនេះ $2|N$ លុះត្រាតែ $2|a_0$ ហើយ $5|N$ លុះត្រាតែ $5|a_0$ ។

2. *ភាពចែកដាច់នឹង* 4 *ឬ នឹង* 25

ទ្រឹស្តីបទ :

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **4** លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងនៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង **4**

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **25** លុះត្រាតែលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង **25** គឺ **{ 00 , 25 , 50 , 75 }** ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0}$ ជាចំនួនគត់សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល **10** ។

គេអាចសរសេរចំនួន N ជា $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2} \times 100 + \overline{a_1 a_o}$

គេបាន $N \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$ និង $N \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}$

ដូចនេះ $4|N$ លុះត្រាតែ $4|\overline{a_1 a_0}$ ហើយ $25|N$ លុះត្រាតែ $25|\overline{a_1 a_0}$ ។

3. *ភាពចែកដាច់នឹង* 3 *ឬ នឹង* 9

ទ្រឹស្តីបទ :

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **3** លុះត្រាតែផលបូកនៃគ្រប់លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង **3** ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **9** លុះត្រាតែផលបូកនៃគ្រប់លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង **9** ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $N=\overline{a_n a_{n-1}.....a_2 a_1 a_0}$ ជាចំនួនគត់សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ។

គេអាចសរសេរចំនួន N ជា $N=\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k}\times 10^{n-k})$

ដោយ $10^{n-k}\equiv 1\pmod 3$ និង $10^{n-k}\equiv 1\pmod 9$

គេបាន $N\equiv\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k})\pmod 3$ និង $N\equiv\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k})\pmod 9$

ដែល $\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k})=\sum_{k=0}^{n}(a_k)=a_0+a_1+....+a_n$ ។

ដូចនេះ $3|N$ លុះត្រាតែ $3|\sum_{k=0}^{n}(a_k)$ ហើយ $9|N$ លុះត្រាតែ $9|\sum_{k=0}^{n}(a_k)$ ។

4. ***ភាពចែកដាច់នឹង*** 11

ទ្រឹស្តីបទ :

មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **11** លុះត្រាតែផលដករវាងផលបូកលេខខ្ទង់សេស និង ផលបូកលេខខ្ទង់គូនៃចំនួននោះ(រាប់ពីស្តាំទៅឆ្វេង) ចែកដាច់នឹង **11** ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

តាង $N=\overline{a_n a_{n-1}.....a_2 a_1 a_0}$ ជាចំនួនគត់សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ។

គេអាចសរសេរចំនួន N ជា $N=\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k}\times 10^{n-k})=\sum_{k=0}^{n}(a_k\times 10^{k})$

ដោយ $10^{k}\equiv(-1)^{k}\pmod{11}$

គេបាន $N \equiv \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \pmod{11}$

ដែល $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = (a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)$

ដូចនេះ $11 | N$ លុះត្រាតែ $11 | (a_0 + a_2 + ...) - (a_1 + a_3 + ...)$ ។

X. ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ាត និង វិលសុន

ក. ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ាត (Fermat's Theorem)

បើ p ជាចំនួនបឋម និង a ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិចែកមិនដាច់នឹង p នោះគេបាន

$a^p - a$ ចែកដាច់នឹង p ឬ $a^p \equiv a \pmod{p}$ ។

-ចំពោះ $a = 1$ គេបាន $1^p - 1 \equiv 0$ (mpd p) ពិត

-យើងឧបមាថាវាពិតចំពោះ $a = m$ គឺ $m^p - m \equiv 0 \pmod{p}$

ដែល m ចែកមិនដាច់នឹង p ។

-យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $a = m + 1$ ទៀតគឺ :

$(m+1)^p - (m+1) \equiv 0 \pmod{p}$ ។

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$(m+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k m^k = \sum_{k=1}^{p-1}(C_p^k m^k) + m^p + 1$$

គេមាន $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p}{k} \cdot \dfrac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \dfrac{p}{k} C_{p-1}^{k-1}$

ឬ $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ នោះ $p | kC_p^k$ តែដោយ $GCD(p,k) = 1$

នោះគេទាញ $p\,|\,C_p^k$ នាំឱ្យ $p\,|\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k m^k$

ហេតុនេះ $(m+1)^p \equiv m^p + 1 \pmod p$

តែតាមការឧបមា $m^p - m \equiv 0 \pmod p$

គេបាន $(m+1)^p - (m+1) \equiv (m^p - m) \equiv 0 \pmod p$ ពិត ។

ដូចនេះ $a^p \equiv a \pmod p$ ដែល a ចែកមិនដាច់នឹង p ។

វិបាក :

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេអាចសរសេរ $a^p - a = a(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$

បើ $GCD(a, p) = 1$ នោះ $p\,|\,(a^{p-1} - 1)$ ។

ដូចនេះ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ដែល a និង p បឋមរវាងគ្នា ។

೭. ទ្រឹស្តីបទវិលសុន (Willson's Theorem)

បើ p ជាចំនួនបឋមនោះ $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

XI. ទ្រឹស្តីបទអឺលែ Euler's Theorem

1. អនុគមន៍អឺលែ

✍ **និយមន័យ :**

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេតាង $\varphi(n)$ ជាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k តូចជាង n ដែលបឋមរវាងគ្នាជាមួយនឹង n ។ អនុគមន៍ $\varphi(n)$ ហៅថាអនុគមន៍អឺលែ (**Euler's totient function**) ហើយដែល $\varphi(1) = 1$ និងគ្រប់ចំនួនបឋម p គេមាន $\varphi(p) = p - 1$ ។

ឧទាហរណ៍ $\varphi(7) = 7 - 1 = 6$, $\varphi(11) = 11 - 1 = 0$ ។

✍ **លក្ខណៈ និង ទ្រឹស្តីបទ**

ក. $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$

ដែល p ជាចំនួនបឋម និង $\alpha \ge 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ខ. $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ ដែល $GCD(a,b) = 1$ ។

គ. $\varphi(p_1^{\alpha 1}.p_2^{\alpha 2}....p_k^{\alpha k}) = \varphi(p_1^{\alpha 1}).\varphi(p_2^{\alpha 2})...\varphi(p_k^{\alpha k})$

ដែល p_k ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា និង $\alpha_k \ge 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ឃ. $\varphi[LCM(a,b)] \times \varphi[GCD(a,b)] = \varphi(a) \times \varphi(b)$

ង. បើ $b | a$ នោះ $\varphi(b) | \varphi(a)$

ឧទាហរណ៍ :

$$\varphi(343) = \varphi(7^3) = 7^3 - 7^2 = 294$$

$$\varphi(72) = \varphi(2^3.3^2) = \varphi(2^3).\varphi(3^2) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3) = 24$$

2.ទ្រឹស្តីបទ

បើ a និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នានោះគេបាន :

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូររកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 3^{1000} ?

គេមាន $\varphi(100) = \varphi(2^2.5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40$

គេបាន $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ នោះ $3^{1000} = (3^{40})^{25} \equiv 1 \pmod{100}$

ដូចនេះចំនួន 3^{1000} មានលេខពីខ្ទង់ចុងក្រោយ 01 ។

XII. សមីការឌីយ៉ូផង់លីនេអ៊ែ (Linear Diophantine Equation)

1. និយមន័យ

សមីការដែលមានរាង $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k = b$ (*)

ដែលមេគុណ $a_1 , a_2 , ..., a_k$ និង b ជាចំនួនគត់ថេរ ។

2. ទ្រឹស្តីបទ

សមីការមានចម្លើយលុះត្រាតែ $GCD(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) | b$ ។

ឧទាហរណ៍ : សមីការ $48x + 36y = 17$ គ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំនៃចំនួនគត់ទេ ព្រោះ $GCD(48 , 36) = 12$ ហើយ 17 ចែកមិនដាច់នឹង 12 ។

3. ដំណោះស្រាយសមីការរាង ax + by = c

ទ្រឹស្តីបទ :

សន្មតថា a , b , c ជាចំនួនគត់ដែល $GCD(a,b) | c$ ហើយយក (x_o , y_o) ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $ax + by = c$ ។

គ្រប់ចម្លើយដ៏ទៃទៀតនៃសមីការនេះក្នុងសំណុំចំនួនគត់ឱ្យតាមទម្រង់ :

$$x = x_0 + \frac{b}{\delta} t \ , \ y = y_0 - \frac{a}{\delta} t$$ ដែល $\delta = GCD(a, b) \ , t \in Z$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ (x_o , y_o) ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $ax + by = c$ នោះគេបាន :

$ax_0 + by_0 = c$ (1)

យក (x' , y') ជាចម្លើយផ្សេងទៀតនៃ $ax + by = c$ នោះគេបាន :

$ax'+by'=c$ (2)

ធ្វើផលសងសមីការ (2) និង (1) គេបាន :

$a(x'-x_0)+b(y'-y_0)=0$

$$a(x'-x_0)=b(y_0-y')$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\delta=GCD(a,b)$ គេបាន :

$\frac{a}{\delta}(x'-x_0)=\frac{b}{\delta}(y_0-y')$ ដោយ $GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta})=1$

នោះគេបាន $\frac{a}{\delta}\mid(y_0-y')$ នាំឱ្យមាន $t\in Z$ ដែល $y_0-y'=\frac{a}{\delta}t$

គេទាញបាន $y'=y_0-\frac{a}{\delta}t$ ហើយ $\frac{a}{\delta}(x'-x_0)=\frac{b}{\delta}.\frac{a}{\delta}t$

គេទាញ $x'=x_0+\frac{b}{\delta}t$ ។

ដូចនេះ $x=x_0+\frac{b}{\delta}t$, $y=y_0-\frac{a}{\delta}t$ ដែល $\delta=GCD(a,b)$, $t\in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ ១: ដោះស្រាយសមីការ $7x+4y=15$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $x=1$, $y=2$ គេបាន $7(1)+4(2)=15$ ពិត

ដូចនេះគូ $(1,2)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ ។

ដោយ $GCD(7,4)=1$ នោះតាមទ្រឹស្ដីបទខាងលើគេបានចម្លើយ :

$x=1+4t$, $y=2-7t$ ដែល $t\in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ ២:

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តពីរ $(x_n)_{n\geq 1}$ និង $(y_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ :

$(x_n): 3, 7, 11, 15, ...$ និង $(y_n): 11\ ,\ 20\ ,\ 29\ , 38, ...$

តើក្នុងចំណោម 2012 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) មានប៉ុន្មានតួដែលស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

តួទី p នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (x_n) គឺ $x_p = 3 + (7-3)(p-1) = 4p-1$

តួទី k នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (y_k) គឺ $y_k = 11 + (20-11)(k-1) = 9k+2$

បើ $x_p = y_k$ គេបាន $4p-1 = 9k+2$ ឬ $4p-9k=3$

ចំពោះ $p=3\ ,\ k=1$ គេបាន $4(3)-9(1)=3$ ពិត

នោះគូ $p=3\ ,\ k=1$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ ។

សមីការ $4p-9k=3$ អាចសរសេរ $4(p-3)=9(k-1)$

ដោយ $GCD(4,9)=1$ នាំឱ្យមាន $t\geq 0\ ,\ t\in IN$ ដែល

$p-3=9t$ និង $k-1=4t$ ឬ $p=9t+3\ ,\ k=4t+1$

ចំពោះ $1\leq p\leq 2012$ និង $1\leq k\leq 2012$ គេទាញបាន

$\begin{cases}1\leq 9t+3\leq 2012\\ 1\leq 4t+1\leq 2012\end{cases}$ នាំឱ្យ $0\leq t\leq 223$ ឬ $t=0,1,2,...,223$ ។

ដូចនេះក្នុងចំណោម 2012 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត(x_n)និង(y_n)មាន224តួស្មើគ្នា ។

៤. ដំណោះស្រាយសមីការរាង $\mathbf{ax+by=\delta=GCD(a,b)}$

គេឱ្យសមីការ $\mathbf{ax+by=\delta}$ ដែល $\mathbf{GCD(a,b)=\delta}$

បើ $\mathbf{(x_o,y_o)}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $\mathbf{ax+by=\delta}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{ax_0+by_0=\delta\ (1)}$

យក $\mathbf{(x',y')}$ ជាចម្លើយផ្សេងទៀតនៃ $\mathbf{ax+by=\delta}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{ax'+by'=\delta\ \ (2)}$

ធ្វើផលសងសមីការ $\mathbf{(2)}$ និង $\mathbf{(1)}$ គេបាន :

$\mathbf{a(x'-x_0)+b(y'-y_0)=0}$

$$\mathbf{a(x'-x_0)=b(y_0-y')}$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\mathbf{\delta=GCD(a,b)}$ គេបាន :

$\mathbf{\frac{a}{\delta}(x'-x_0)=\frac{b}{\delta}(y_0-y')}$ ដោយ $\mathbf{GCD(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta})=1}$

នោះគេបាន $\mathbf{\frac{a}{\delta}\,|\,(y_0-y')}$ នាំឱ្យមាន $\mathbf{t\in Z}$ ដែល $\mathbf{y_0-y'=\frac{a}{\delta}t}$

គេទាញបាន $\mathbf{y'=y_0-\frac{a}{\delta}t}$ ហើយ $\mathbf{\frac{a}{\delta}(x'-x_0)=\frac{b}{\delta}.\frac{a}{\delta}t}$

គេទាញ $\mathbf{x'=x_0+\frac{b}{\delta}t}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{x=x_0+\frac{b}{\delta}t\ ,\ y=y_0-\frac{a}{\delta}t}$ ដែល $\mathbf{\delta=GCD(a,b)\ ,t\in Z}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ដោះស្រាយសមីការ $42x+66y=6$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

គេមាន $GCD(42,66)=6$ ។

ចំពោះ $x=-3$, $y=2$ គេបាន $42(-3)+66(2)=6$ ពិត

នោះ $x=-3$, $y=2$ ជាគូចម្លើយមួយនៃសមីការ ។

តាមទ្រឹស្តីបទគេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ :

$x=-3+11t$, $y=2-7t$ ចំពោះគ្រប់ $t\in Z$ ។

៤. ដំណោះស្រាយសមីការរាង $ax+by=1$ *ដែល* $GCD(a,b)=1$

ដោះស្រាយសមីការ $226x+175y=1$

គេមាន $226=2^3\times 3\times 11$, $175=5^2\times 7$ នោះ $GCD(226,175)=1$

តាមវិធីចែកអឺគ្លីតគេបាន :

$226=175\times 1+51$ ឬ $51=226-175\times 1$

$175=51\times 3+22$ ឬ $22=175-51\times 3$

$$22=175-(226-175\times 1)\times 3$$

$$22=-226\times 3+175\times 4$$

$51=22\times 2+7$ ឬ $7=51-22\times 2$

$$7=226-175\times 1-(-226\times 3+175\times 4)\times 2$$

$$7=226\times 7-175\times 9$$

$22=7\times 3+1$ ឬ $1=22-7\times 3$

$$1=-226\times 3+175\times 4-(226\times 7-175\times 9)\times 3$$

$$1=226\times(-24)+175\times(31)$$

គេទាញបាន $x=-24$, $y=31$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ ។

សមីការអាចសរសេរ $226(x+4)+175(y-31)=0$

ឬ $226(x+4)=175(31-y)$ នាំឱ្យមានចំនួនគត់ t ដែល

$x+4=175t$ និង $31-y=226t$

ដូចនេះ $x=175t-4$, $y=31-226t$ ដែល $t \in Z$ ។

XIII សមីការពីតាគ័រ (Pythagore's Equation)

ទ្រឹស្តីបទ

យក x , y , z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលមានតួចែករួមស្មើ 1 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2=z^2$ ។ ហេតុនេះ ក្នុងចំណោម x ឬ y ត្រូវមានមួយជាចំនួនគូយ៉ាងតិច ។ ក្នុងករណីដែល x ជាចំនួនគូនោះគេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា u និង v ហើយមានភាពគូសេសផ្ទុយគ្នាដែល :

$x=2uv$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក d ជាតួចែករួមរបស់ x និង y នោះ $d^2 | x^2+y^2$

ដូចនេះ $d^2 | z^2$ ឬ $d | z$ នោះ d ជាតួចែករួមនៃ x , y , z ។

ដោយបម្រាប់គេមាន $d=1$ នោះ x និង y បឋមរវាងគ្នា ហើយ x, y, z បឋមរវាងគ្នាពីៗ ។

បើ x និង y ជាចំនួនសេសទាំងពីរនោះ $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 4$

គេបាន $z^2 = x^2+y^2 \equiv 2 \pmod 4$ មិនអាចមាន ។

ដូចនេះ x និង y មិនអាចជាចំនួនសេទាំងពីរទេ ។ សន្មតថា x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគូ

នោះគេយក $\mathbf{x=2w}$ គ្រប់ចំនួនកត់ធម្មជាតិ $\mathbf{w}$ ។

សមីការ $\mathbf{x^2+y^2=z^2}$ ក្លាយជា $\mathbf{4w^2+y^2=z^2}$

ឬ $\mathbf{(z-y)(z+y)=4w^2}$

តាង δ ជាតួចែករួមរវាង $\mathbf{z-y}$ និង $\mathbf{z+y}$ ។

គេមាន $\mathbf{z-y}$ និង $\mathbf{z+y}$ មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{y,z}$ ។

តាង δ ជាតួចែករួមរវាង $\mathbf{z-y}$ និង $\mathbf{z+y}$ នោះ δ ក៏ត្រូវតែជាតួចែករួមរវាង

$\mathbf{(z-y)+(z+y)=2z}$ និង $\mathbf{(z+y)-(z-y)=2y}$ នោះ $\mathbf{\delta=1}$

ឬ $\mathbf{\delta=2}$ នោះគេបាន $\mathbf{GCD(\frac{z-y}{2},\frac{z+y}{2})=1}$ ។

ពីសមីកា $\mathbf{(z-y)(z+y)=4w^2}$ គេអាចសរសេរ :

$\mathbf{\frac{z-y}{2}.\frac{z+y}{2}=w^2}$ នាំឱ្យមានចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា $\mathbf{u}$ និង $\mathbf{v}$ ដែល

$\mathbf{\frac{z+y}{2}=u^2}$ និង $\mathbf{\frac{z-y}{2}=v^2}$ ហើយ $\mathbf{w^2=u^2v^2}$

គេទាញ $\mathbf{w=uv}$, $\mathbf{z=u^2+v^2}$ និង $\mathbf{y=u^2-v^2}$

ដូចនេះ $\mathbf{x=2uv}$, $\mathbf{y=m^2-n^2}$, $\mathbf{z=m^2+n^2}$ ។

ឧទាហរណ៏ :

បើ $\mathbf{(a_1,b_1,c_1)}$ និង $\mathbf{(a_2,b_2,c_2)}$ ជាត្រីធាតុរបស់ពីតាគ័រនោះស្រាយថា :

$\mathbf{(a_1a_2+b_1b_2,a_2b_1-a_1b_2,c_1c_2)}$ ក៏ជាត្រីធាតុរបស់ពីតាគ័រដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

$\mathbf{(a_1,b_1,c_1)}$ និង $\mathbf{(a_2,b_2,c_2)}$ ជាត្រីធាតុរបស់ពីតាគ័រនោះគេបាន

$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ និង $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$

គេមាន $a_1^2 + b_1^2 = (a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1) = z_1.\overline{z_1}$

និង $a_2^2 + b_2^2 = (a_2 - ib_2)(a_2 + ib_2) = z_2.\overline{z_2}$

ដែល $z_1 = a_1 + ib_1$ និង $z_2 = a_2 + ib_2$

គេបាន $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} = (z_1\overline{z_2})(\overline{z_1}z_2)$

តាង $z = z_1.\overline{z_2}$ នោះ $\overline{z} = \overline{z_1}.z_2$ ព្រោះ $\overline{\overline{z_2}} = z_2$

គេបាន $c_1^2c_2^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = z.\overline{z} = |z|^2$ (1)

ដោយ $z = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)$

នោះ $|z|^2 = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)^2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន :

$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)^2 = (c_1c_2)^2$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាត្រីធាតុ $(a_1a_2 + b_1b_2\,, a_2b_1 - a_1b_2\,, c_1c_2)$

ជាត្រីធាតុរបស់ពីតាគ័រ ។

XIV-សមីការផែល (Pell's equation)

1. និយមន័យ

សមីការ **Diophantine** ទាំងឡាយណាដែលមានរាង $x^2 - dy^2 = 1$ ហៅថាសមីការ

ផែល (**Pell's equation**) ដែល d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនមែនជាការេប្រាកដ ។

ឧទាហរណ៍ : $x^2 - 3y^2 = 1$, $x^2 - 29y^2 = 1$ ហៅថាសមីការផែល ។

២. ទ្រឹស្តីបទ

បើ (x_0, y_0) ជាចម្លើយគោលនៃសមីការ ផែល $x^2 - dy^2 = 1$
គ្រប់ចម្លើយវិជ្ជមានរបស់វាមានទម្រង់ (x_n, y_n) ដែល $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$
ចម្លើយ (x_n, y_n) អាចគណនាតាមរូបមន្ត :

$$x = \frac{(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n + (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n}{2}$$

$$y = \frac{(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n - (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n}{2\sqrt{d}}$$ ។

ឬអាចគណនាបានតាមទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} x_{n+1} = x_0 x_n + dy_0 y_n \\ y_{n+1} = x_0 y_n + x_n y_0 \end{cases}$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ (x_0, y_0) ជាចម្លើយគោលនៃសមីការផែល $x^2 - dy^2 = 1$ នោះគេបាន
$x_0^2 - dy_0^2 = 1$ (i)
គេមាន $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$ (ii)
តាមទ្វេធាញូតុនគេទាញបាន $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_0 - y_0\sqrt{d})^n$ (iii)
ផលគុណ (ii) & (iii) អង្គនិងអង្គគេបាន :
$(x_n + \sqrt{d}y_n)(x_n - \sqrt{d}y_n) = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n(x_0 - \sqrt{d}y_0)^n$
$x_n^2 - dy_n^2 = (x_0^2 - dy_0^2)^n$ (iv)
តាម (i) & (iv) គេបាន $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ ។
ដូចនេះគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x_n, y_n) ដែល $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$ ជាម្លើយ

របស់សមីការ $x^2 - dy^2 = 1$ ដែល (x_0, y_0) ជាចម្លើយគោលរបស់វា ។

បូកសមីការ (ii) និង (iii) គេបាន $x_n = \frac{1}{2}[(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n + (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n]$

ដកសមីការ (ii) និង (iii) គេបាន $y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}[(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n - (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n]$

ដូចនេះ $$x = \frac{(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n + (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n}{2}$$

$$y = \frac{(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n - (x_0 - \sqrt{d}y_0)^n}{2\sqrt{d}}$$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n$

គេបាន $x_{n+1} + \sqrt{d}y_{n+1} = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^{n+1}$

$$x_{n+1} + \sqrt{d}y_{n+1} = (x_0 + \sqrt{d}y_0)(x_n + \sqrt{d}y_n)$$

$$x_{n+1} + \sqrt{d}y_{n+1} = (x_0x_n + dy_0y_n) + \sqrt{d}(x_ny_0 + x_0y_n)$$

គេទាញ $\begin{cases} x_{n+1} = x_0x_n + dy_0y_n \\ y_{n+1} = x_0y_n + x_ny_0 \end{cases}$ ជាទំនាក់ទំនងកំណើន ។

ឧទាហរណ៍ ១

ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - 2y^2 = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចំពោះ $x = 3$, $y = 2$ គេបាន $3^2 - 2\times 2^2 = 1$ ពិត

នោះ $(3,2)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ ។

តាង (x_n, y_n) គូចម្លើយវិជ្ជមានរបស់សមីការ $x^2 - 2y^2 = 1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

គេបាន $x_n + \sqrt{2}y_n = (3 + 2\sqrt{2})^n$ (1)

ហើយ $x_n - \sqrt{2}y_n = (3 - 2\sqrt{2})^n$ (2)

បូកសមីការ$(1)\ \&\ (2)$ គេបាន $x_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}$

ដកសមីការ $(1)\ \&\ (2)$ គេបាន $y_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $x_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}$

$y_n=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,....$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់ ។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m\in IN$ ដែល

$28n^2+1=m^2$ ឬ $m^2-28n^2=1$ ជាសមីការ Pell ។

គូចម្លើយដំបូងនៃសមីការនេះគឺ $m=127\ ,\ n=24$

ព្រោះ $127^2-28\times 24^2=1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $k\ge 1$ គេអាចសរសេរ :

$$m^2-28n^2=127^2-28\times 24^2=(127-28\times 24^2)^k$$

$$(m-2\sqrt{7}n)(m+2\sqrt{7}n)=(127-48\sqrt{7})^k(127+48\sqrt{7})^k$$

គេទាញ $\begin{cases} m-2\sqrt{7}n=(127-48\sqrt{7})^k \\ m+2\sqrt{7}n=(127+48\sqrt{7})^k \end{cases}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ :

$$m=\frac{(127-48\sqrt{7})^k+(127+48\sqrt{7})^k}{2}$$

$$n=\frac{(127+48\sqrt{7})^k-(127-48\sqrt{7})^k}{4\sqrt{7}}$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k$$

ដោយ $127\pm48\sqrt{7}=(8\pm3\sqrt{7})^2$

និង $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})=1$ នោះគេបាន

$$2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k=\left[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k\right]^2$$

គេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k]^2$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ព្រោះ $(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះបើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នោះ$2+2\sqrt{28n^2+1}$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឱ្យសមីការ $x^2-2(4a+1)x+4a^2+8a=0$

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមសមីការ $\Delta'=(4a+1)^2-(4a^2+8a)=12a^2+1$

ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ Δ' ជាការេប្រាកដ

ព្រោះផលបូក និង ផលគុណនៃឫសសមីការនេះស្មើរៀងគ្នា $2(4a+1)$ និង$4a^2+8a$

សុទ្ធតែវិជ្ជមានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $12a^2+1=k^2$

គេបាន $k^2-12a^2=1$ ជាសមីការផែល (**Pell's equation**)

ចំពោះ $k=7$, $a=2$ គេបាន $7^2-12\times 2^2=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

នោះគូ $(k,a)=(7,2)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ ។

តាមទ្រឹស្តីបទចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $k^2-12a^2=1$ គឺ

$$k=\frac{(7-4\sqrt{3})^n+(7+4\sqrt{3})^n}{2},a=\frac{(7+4\sqrt{3})^n-(7-4\sqrt{3})^n}{4\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $a=\dfrac{(7+4\sqrt{3})^n-(7-4\sqrt{3})^n}{4\sqrt{3}}$ គ្រប់ $n=1,2,3,...$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤ . ចូរកំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $x^2-4xy-3y^2=1$

សមីការនេះអាចសរសេរ $(x-2y)^2-7y^2=1$

តាង $x=s+2t$, $y=t$ គេបាន $s^2-7t^2=1$

ចំពោះ $s=8$, $t=3$ គេបាន $8^2-7(3)^2=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

នោះគូ $(8,3)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ ។

តាមរូបមន្តគេបានចម្លើយទូទៅរាង $s=\dfrac{(8-3\sqrt{7})^n+(8+3\sqrt{7})^n}{2}$

និង $t=\dfrac{(8+3\sqrt{7})^n-(8-3\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$ ដែល $n=1,2,3,....$

ដូចនេះ $\mathbf{x}=\dfrac{(\sqrt{7}+2)(8+3\sqrt{7})^{n}+(\sqrt{7}-2)(8-3\sqrt{7})^{n}}{2\sqrt{7}}$

$$\mathbf{y}=\frac{(8+3\sqrt{7})^{n}-(8-3\sqrt{7})^{n}}{2\sqrt{7}}$$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$ ជាចំនួនបឋម ។ កំណត់ $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$ ដើម្បីឱ្យសមីការ :

$\mathbf{x^2 - px + q = 0}$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$

យក $\mathbf{x_1}$ និង $\mathbf{x_2}$ ដែល $\mathbf{x_1 < x_2}$ ជាឬសគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ ។

គេបាន $\mathbf{x^2 - px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2}$

គេទាញ $\mathbf{x_1 + x_2 = p}$ និង $\mathbf{x_1.x_2 = q}$

ដោយ $\mathbf{q}$ ជាចំនួនបឋមនោះ $\mathbf{x_1 = 1}$ ។

គេបាន $\mathbf{q = x_2}$, $\mathbf{p = x_2 + 1}$ ជាចំនួនគត់បន្តគ្នា ។ ដោយ $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $\mathbf{q = 2}$ ហើយ $\mathbf{p = x_2 + 1 = q + 1 = 3}$

ដូចនេះ $\mathbf{p = 3}$, $\mathbf{q = 2}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យ $\mathbf{p}$ ជាចំនួនបឋម ហើយ $\mathbf{k}$ ជាចំនួនគត់ដែល $1 \le k < p$ ។

ចូរស្រាយថា $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{p}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{p}$

គេមាន $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p}{k} \cdot \dfrac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \dfrac{p}{k} C_{p-1}^{k-1}$

ឬ $k\,C_p^k = p\,C_{p-1}^{k-1}$ នោះ $p \mid kC_p^k$

$\mathbf{p}$ ជាចំនួនបឋម ហើយ $\mathbf{k}$ ជាចំនួនគត់ដែល $1 \le k < p$ នោះ $\gcd(k,p) = 1$

ហេតុនេះតាម $p \mid kC_p^k$ គេទាញបាន $p \mid C_p^k$ ។

ដូចនេះ ស្រាយថា $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{p}$ ។

លំហាត់ទី៣ (Russia 2001)

គេឱ្យ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា ។

គេដឹងថា $\mathbf{ab(a+b)}$ចែកដាច់នឹង $\mathbf{a^2+ab+b^2}$ ។

ចូរស្រាយថា $|\mathbf{a-b}| > \sqrt[3]{\mathbf{ab}}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|\mathbf{a-b}| > \sqrt[3]{\mathbf{ab}}$

តាង $\delta = \mathbf{GCD(a,b)}$ នាំឱ្យមានគូចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា $\mathbf{(u\,,v)}$ ដែល

$\mathbf{a} = \delta\mathbf{u}$ និង $\mathbf{b} = \delta\mathbf{v}$

គេបាន $\dfrac{\mathbf{ab(a+b)}}{\mathbf{a^2+ab+b^2}} = \dfrac{\delta\mathbf{uv(u+v)}}{\mathbf{u^2+uv+v^2}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

យើងមាន $\mathbf{GCD(u^2+uv+v^2,u) = GCD(v^2,u) = 1}$

ហើយ $\mathbf{GCD(u^2+uv+v^2,v) = GCD(u^2,v) = 1}$

និង $\mathbf{GCD(u^2+uv+v^2,u+v) = GCD(v^2,u+v) = 1}$

នោះប្រភាគ $\dfrac{\delta\mathbf{uv(u+v)}}{\mathbf{u^2+uv+v^2}}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $\mathbf{u^2+uv+v^2}\,|\,\delta$

នោះគេបាន $\delta \geq \mathbf{u^2+uv+v^2}$ ។ គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា $\mathbf{(u\,,v)}$

គេមាន $|\mathbf{u-v}| \geq \mathbf{1}$ ហេតុនេះ $|\mathbf{a-b}|^3 = |\mathbf{u-v}|^3.\delta^3 \geq \delta^3$

តែ $\delta \geq \mathbf{u^2+uv+v^2}$ នោះ $|\mathbf{a-b}|^3 \geq \delta^2(\mathbf{u^2+uv+v^2}) > \delta^2\mathbf{uv}$

ដោយ $\mathbf{ab} = \delta^2\mathbf{uv}$ នោះ $|\mathbf{a-b}|^3 > \mathbf{ab}$ ដូចនេះ $|\mathbf{a-b}| > \sqrt[3]{\mathbf{ab}}$ ។

លំហាត់ទី៤ (Romania 2003)

គេឱ្យចំនួនបឋម $n_1 < n_2 < n_3 < .... < n_{31}$ ដែល $n_1{}^4 + n_2{}^4 + ... + n_{31}{}^4$ ចែកដាច់នឹង 30 នោះចូរស្រាយថាក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះគេអាចរកចំនួនបឋមបីបន្តគ្នាបាន ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S = n_1{}^4 + n_2{}^4 + ... + n_{31}{}^4$ ដែល S ចែកដាច់នឹង $30 = 2 \times 3 \times 5$ ។

យើងដឹងថាគ្រប់ចំនួនបឋមទាំងអស់សុទ្ធតែជាចំនួនសេស លើកលែងតែចំនួនបឋម 2 ចេញ ហើយ S ជាផលបូកនៃចំនួនបឋមខុសគ្នាចំនួន 31 ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $30 | S$ លុះណាតែក្នុងចំណោមចំនួនបឋមទាំងអស់នេះមានមួយស្មើនឹង 2 ។

យើងយក $n_1 = 2$ ។

ជាបន្តទៀតយើងពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ចំនួនបឋម n_i ដែល $1 \le i \le 31$ ត្រូវមានមួយស្មើនឹង $3 = n_2$ ព្រោះថាបើសិន n_i ចែកមិនដាច់នឹង 3 ទេនោះចំនួន n_i ត្រូវមានរាង $3k + 1$, $3k + 2$ គ្រប់ $1 \le i \le 31$ និង $n_i{}^4 \equiv 1 \pmod 3$

ហើយ $S = n_1{}^4 + n_2{}^4 + ... + n_{31}{}^4 \equiv 31 \equiv 1 \pmod{3}$ ។

ជាចុងក្រោយយើងនឹងស្រាយថាមាន $n_3 = 5$ មួយទៀតក្នុងចំណោម n_i ដែល $1 \le i \le 31$ ។ បើ n_i ដែល $1 \le i \le 31$ សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះគេបាន $n_i{}^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$ នាំឱ្យ $n_i{}^4 \equiv 1 \pmod 5$ ហើយ $S \equiv 31 \equiv 1 \pmod 5$

ដូចនេះគេអាចរកបានចំនួនបឋម 2 , 3 , 5 បន្តគ្នាក្នុងចំណោមចំនួនបឋមទាំង 31 ។

លំហាត់ទី៥

ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីធាតុ (x, y, z) ជាចំនួនគត់ដែល $3x+4y+5z=6$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $3x+4y+5z=6$ នោះ $3x+4y=6-5z$

គេបាន $3x+4y\equiv 1 \pmod 5$ ព្រោះ $6-5z\equiv 1 \pmod 5$

នាំឱ្យមាន $t\in Z$ ដែល $3x+4y=1+5t$

គេទាញបាន $x=\dfrac{1+5t-4y}{3}=t-y+\dfrac{1+2t-y}{3}$

បើ $1+2t-y=0$ ឬ $y=1+2t$ នោះ $x=t-(1+2t)=-1-t$

ហើយតាមសមីការ $3x+4y+5z=6$ គេទាញបាន $z=\dfrac{6-3x-4y}{5}$

$z=\dfrac{6-3(-1-t)-4(1+2t)}{5}=\dfrac{5-5t}{5}=1-t$ ។

ដូចនេះ $x=-1-t$, $y=1+2t$, $z=1-t$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $\mathbf{N=(11111)_n}$ ។ កំណត់ $\mathbf{n}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{N}$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\mathbf{N=(11111)_n=n^4+n^3+n^2+n+1}$

-បើ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគូនោះ $\mathbf{n^2+\frac{n}{2}}$ និង $\mathbf{n^2+\frac{n}{2}+1}$ ជាពីរចំនួនគត់បន្តគ្នា

គេមាន $\mathbf{(n^2+\frac{n}{2})^2=n^4+n^3+\frac{n^2}{4}<N}$

ហើយ $\mathbf{(n^2+\frac{n}{2}+1)^2=n^4+n^3+n^2+n+1+\frac{5n^2}{4}>N}$

នោះ $\mathbf{(n^2+\frac{n}{2})^2<N<(n^2+\frac{n}{2}+1)^2}$ នាំឱ្យ $\mathbf{N}$ មិនអាចជាការេប្រាកដ

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគូ ។

-បើ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនសេសនោះ $\mathbf{n^2+\frac{n-1}{2}}$ និង $\mathbf{n^2+\frac{n+1}{2}}$ ជាចំនួនគត់បន្តគ្នា ។

មាន $\mathbf{(n^2+\frac{n-1}{2})^2=n^4+n^3-\frac{n^2}{2}-n+\frac{1}{2}<N}$

$$\mathbf{(n^2+\frac{n+1}{2})^2=n^4+n^3+n^2+n+1+\frac{(n-3)(n+1)}{4}\geq N}$$

បើ $\mathbf{n>3}$ នោះ $\mathbf{(n^2+\frac{n-1}{2})^2<N<(n^2+\frac{n+1}{2})^2}$ នាំឱ្យ $\mathbf{N}$ មិនអាចជាការេប្រាកដ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{N}$ ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ $\mathbf{n=3}$ គឺ $\mathbf{N=121=11^2}$ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរស្រាយថា $\frac{\mathbf{12n+1}}{\mathbf{30n+2}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

តាង $\mathbf{a=12n+1}$ និង $\mathbf{b=30n+2}$

គេមាន $\mathbf{5a-2b=60n+5-60n-4=1}$

តាមទ្រឹស្តីបទ **Bezout** គេទាញបាន $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះ $\frac{\mathbf{12n+1}}{\mathbf{30n+2}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។

របៀបទី២

តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន :

$$\begin{aligned}\mathbf{GCD(30n+2,12n+1)} &= \mathbf{GCD(12n+1,6n)}\\ &= \mathbf{GCD(6n,1)=1}\end{aligned}$$

គេទាញបាន $\mathbf{30n+2}$ និង $\mathbf{12n+1}$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ដូចនេះ $\frac{\mathbf{12n+1}}{\mathbf{30n+2}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។

លំហាត់ទី៨ (Russia 1995)

គេឱ្យ $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល :

$$\mathbf{LCM(m,n)+GCD(m,n)=m+n}$$

ចូរស្រាយថា $\mathbf{m|n}$ ឬ $\mathbf{n|m}$?

ដំណោះស្រាយ

តាង $\delta=\mathbf{GCD(m,n)}$ នាំឱ្យមានគូចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{(a,b)}$ ដែល $\mathbf{GCD(a,b)=1}$

ហើយ $\mathbf{m=a\delta}$ និង $\mathbf{n=b\delta}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{LCM(m,n)=\dfrac{mn}{GCD(m,n)}=\dfrac{ab\delta^2}{\delta}=ab\delta}$

សមីការ $\mathbf{LCM(m,n)+GCD(m,n)=m+n}$ ក្លាយជា

$$\mathbf{ab\delta+\delta=a\delta+b\delta}$$

$$\mathbf{ab+1=a+b}$$

$$\mathbf{ab-a-b+1=0}$$

$$\mathbf{a(b-1)-(b-1)=0}$$

$$\mathbf{(a-1)(b-1)=0}$$

គេទាញបាន $\mathbf{a=1}$ ឬ $\mathbf{b=1}$ ។

-បើ $\mathbf{a=1}$ គេបាន $\mathbf{m=\delta}$, $\mathbf{n=b\delta}$ នោះ $\mathbf{m|n}$

-បើ $\mathbf{b=1}$ គេបាន $\mathbf{m=a\delta}$, $\mathbf{n=\delta}$ នោះ $\mathbf{n|m}$

ដូចនេះ $\mathbf{m|n}$ ឬ $\mathbf{n|m}$ ។

លំហាត់ទី៩ (UK 1998)

គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ ។

តាង h ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ x, y, z ។

ចូរស្រាយថា $hxyz$ និង $h(y-x)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ h ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ x, y, z នាំឱ្យមានត្រីធាតុ (a, b, c) ដែល

$x = ah$, $y = bh$, $z = ch$ និង $GCD(a, b, c) = 1$ ។

តាង $\delta = GCD(a, b)$ នាំឱ្យមានគូ (m, n) ដែល $a = m\delta$, $b = n\delta$

ហើយ $GCD(a, b) = 1$ ។

គេមាន $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ នោះ $\frac{1}{ah}-\frac{1}{bh}=\frac{1}{ch}$ ឬ $c(b-a) = ab$

ឬ $c(m\delta - n\delta) = mn\delta^2$

ឬ $c(m-n) = mn\delta$ ដោយ $GCD(m-n, n) = GCD(m, n) = 1$

និង $GCD(m-n, m) = GCD(m, n) = 1$

នោះ $\delta | c$ តែ $GCD(a, b, c) = 1$ នោះ $\delta = 1$ ហើយ $GCD(a, b) = 1$

គេបាន $GCD(b-a, ab) = 1$ ។ តាម $c(b-a) = ab$ គេទាញបាន

$c = ab$ និង $b - a = 1$ ។

ដូចនេះ $hxyz = h^4abc = h^4c^2 = (ch)^2$ និង $h(y-x) = h^2(b-a) = h^2$

លំហាត់ទី១០ (HMMT 2005)

ចំនួន 27000001 មានបួនកត្តាបឋមប្រាកដ ។

ចូរគណនាផលបូកកត្តាបឋមនោះ ?

ដំណោះស្រាយ

តាមសមភាព $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)=(a+1)[(a+1)^2-3a]$

បើយើងយក $a=300$ គេបាន :

$$27000001=301(301^2-30^2)$$
$$=301\times 331\times 271$$
$$=7\times 43\times 271\times 331$$

ដូចនេះ $7+43+271+331=652$ ។

លំហាត់ទី១១ (HMMT 2005)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n!+5}$ ជាគូបប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $\mathbf{n}$

ចំពោះ $\mathbf{n \ge 7}$ គេបាន $\mathbf{n!+5 \equiv 5 \pmod 7}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{k}$ គេមាន $\mathbf{k^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 7}$

ដូចនេះបើ $\mathbf{n \ge 7}$ ចំនួន $\mathbf{n!+5}$ មិនអាចជាគូបប្រាកដ ។

ចំពោះ $\mathbf{n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3, 4\ , 5, 6}$ មានតែករណី $\mathbf{n = 5}$ ដែល $\mathbf{n!+6 = 125 = 5^3}$

ដូចនេះ $\mathbf{n = 5}$ ។

លំហាត់ទី១២

បើ $a \equiv r \pmod n$ នោះបង្ហាញថា $a^n \equiv r^n \pmod{n^2}$

តើចម្រាស់សំណើនេះពិតឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

បើ $a \equiv r \pmod n$ នាំឱ្យមាន $q \geq 0$ ជាចំនួនគត់ដែល $a = nq + r$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$a^n = (nq+r)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (nq)^{n-p} r^p$$

$$a^n = \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p (nq)^{n-p} + r^n$$

ដោយគ្រប់ $0 \leq p \leq n-1$ គេមាន $n \mid (nq)^{n-p}$ និង $n \mid C_n^p$

នោះ $n^2 \mid \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p (nq)^{n-p}$

ដូចនេះ $a^n \equiv r^n \pmod{n^2}$ ។

ចម្រាស់នៃសំណើនេះមិនពិតទេ ។

ជាឧទាហរណ៍ $3^4 \equiv 1 \pmod{4^2}$ ប៉ុន្តែ $3 \neq 1 \pmod 4$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេតាង $S_n(k) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

និង $S_n(1) = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ។

ចូរស្រាយថា $S_n(k)$ ចែកដាច់នឹង $S_n(1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមានគ្រប់ k ជាចំនួនសេស $a + b \mid a^k + b^k$ ដែល a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

-ករណី $n = 2m + 1$ ជាចំនួនសេសនោះគេបាន

$$S_{2m+1}(k) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + (2m)^k + (2m+1)^k$$
$$= [1^k + (2m+1)^k] + [2^k + (2m)^k] + ...$$

ដោយ $(m+1) \mid 1^k + (2m+1)^k$, $(m+1) \mid 2^k + (2m)^k ,...$

នោះគេទាញបាន $(m+1) \mid S_{2m+1}(k)$

ម្យ៉ាងទៀតគេអាចសរសេរ :

$$S_{2m+1}(k) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + (2m)^k + (2m+1)^k$$
$$= [1^k + (2m)^k] + [2^k + (2m-1)^k] + ...$$

ដោយ $2m + 1 \mid 1^k + (2m)^k$, $2m + 1 \mid 2^k + (2m-1)^k ,...$

នោះគេទាញបាន $(2m+1) \mid S_{2m+1}(k)$ ដោយ $GCD(m+1, 2m+1) = 1$

នោះ $(m+1)(2m+1) \mid S_{2m+1}(k)$ ឬ $S_{2m+1}(1) \mid S_{2m+1}(k)$

-ករណី $n = 2m$ គូ (ដោះស្រាយខាងលើដែរ) ។

លំហាត់ទី១៤ (IMO 1986)

គេតាង $\mathbf{d}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសពី $\mathbf{2, 5}$ ឬ $\mathbf{13}$ ។

ចូរបង្ហាញថាគេអាចរកតម្លៃខុសគ្នា $\mathbf{a,b}$ មួយនៅក្នុងសំណុំ $\{2,5,13,d\}$

ដែល $\mathbf{ab-1}$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ $\mathbf{a,b}$ ជាតម្លៃខុសគ្នានៃ $\{2,5,13,d\}$ នោះគេបាន :

$$ab-1\in\{9,25,64\ ,2d-1,5d-1,13d-1\}$$

ដើម្បីបង្ហាញថាមានតម្លៃ $\mathbf{a,b}$ ដែល $\mathbf{ab-1}$ មិនមែនជាការេប្រាកដនោះយើងត្រូវ

ឧបមាថា $\mathbf{2d-1\ ,5d-1,13d-1}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដជាករណីមិនអាចមាន ។

បើ $\mathbf{2d-1\ ,5d-1,13d-1}$ ជាការេប្រាកដនោះមានចំនួនគត់ $\mathbf{a,b,c}$ ដែល

$2d-1=a^2\ ,\ 5d-1=b^2\ ,13d-1=c^2$ ។

តាមសមីការ $2d-1=a^2$ បញ្ជាក់ថា $\mathbf{a}$ គឺជាចំនួនសេស ។ យក $\mathbf{a=2x+1}$

គេបាន $d=\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}=2x(x+1)+1$ នោះ $d\equiv 1\pmod 4$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\mathbf{d=2x(x+1)+1}$ ជាចំនួនសេសនោះតាមសមីការ :

$5d-1=b^2$ និង $13d-1=c^2$ គេបាន $\mathbf{b}$ និង $\mathbf{c}$ សុទ្ធតែជាចំនួនគូ ។

តាង $\mathbf{b=2y\ ,c=2z}$ គេបាន $(13d-1)-(5d-1)=c^2-b^2=4(z^2-y^2)$

គេទាញ $d=\dfrac{1}{2}(z^2-y^2)$ នោះអាចមាន $\mathbf{z}$ និង $\mathbf{y}$ ដែល $d\equiv 0\pmod 4$

ដោយ $d \equiv 1$ នោះមានន័យថាការឧបមាខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះគ្មានតម្លៃ d ដែលធ្វើឱ្យ $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដបានទេ ។

សរុបមកគេអាចរកតម្លៃខុសគ្នា a,b មួយនៅក្នុងសំណុំ $\{2,5,13,d\}$

ដែល $ab-1$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី១៥ (IMO 1998)

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y)

តាង $a=x^2y+x+y$ និង $b=xy^2+y+7$

បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះគេបានដូចគ្នា $ay-bx$ ចែកដាច់នឹង b ។

គេមាន $ay-bx=y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$

ដោយ $x\geq 1$ នោះ $xy^2\geq y^2$

នាំឱ្យ $y^2-7x\leq xy^2-7x<xy^2+y+7=b$ ។

ដូចនេះ y^2-7x ចែកដាច់នឹង b លុះត្រាតែ $y^2-7x\leq 0$ ។

ក. ករណីទី១ : $y^2-7x=0$ នោះ $y^2=7x$

ដោយ y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះលុះត្រាតែ $x=7k^2$ ហើយ $y=7k$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។

ខ.ករណីទី២ $y^2-7x<0$ នោះ $7x-y^2>0$

ដោយពិនិត្យឃើញថា $7x-y^2<7x$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $7x-y^2$ ចែកដាច់នឹង $b=xy^2+y+7$ លុះត្រាតែ $7x>7x-y^2\geq xy^2+y+7$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $y^2<7$ នោះ $y=1$ ឬ $y=2$ ។

-ចំពោះ $y=1$ គេបាន $7x-y^2=7x-1$ ហើយ $b=x+8$

គេមាន $7x-1=7(x+8)-57$ ចែកដាច់នឹង $b=x+8$ លុះត្រាតែ

b ជាតួចែកនៃ 57 ។ ដោយ $b=x+8>8$ នោះ $b=19$ ឬ $b=57$

គេទាញបាន $x=11$ ឬ $x=49$ ។

ដូចនេះគេបាន $x=11$, $y=1$ ឬ $x=49$, $y=1$ ។

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $7x-y^2=7x-4$ ហើយ $b=4x+9$

ដោយ $GCD(4x+9;4)=1$ នោះ $7x-4$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

សមមូល $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$ ។

គេមាន $4(7x-4)=7(4x+9)-79$ ។

ដោយ 79 ជាចំនួនបឋមនោះដើម្បីឱ្យ $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

លុះត្រាតែ $4x+9=79$ នោះ $x=\frac{35}{2}$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះក្នុងករណី $y=2$ គ្មានចម្លើយ ។

សរុបមកគេបានគូចម្លើយ :

$$(x,y)\in\{\ (11,1),(49,1),(7k^2,7k)\ \},k=1,2,...$$

លំហាត់ទី១៦

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $\mathbf{3^n n^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

-សន្មតថា $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n}$ ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ **Euler** គេបាន $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ ។

ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះគេបានដូចគ្នា $\mathbf{n^3(3^n + n^3)}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\mathbf{n^3(3^n + n^3) = (n^3 3^n + 1) + (n^6 - 1)}$

ដោយ $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង7

-សន្មតថា $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n}$ ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ **Euler** គេបាន $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ ។

ចំនួន $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n^3(n^3 3^n + 1)}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\mathbf{n^3(n^3 3^n + 1) = (n^6 - 1)3^n + n^3 + 3^n}$

ដោយ $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{n^3 + 3^n}$ ចែកដាច់នឹង7

ដូចនេះ ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $\mathbf{3^n n^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ទី១៧

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\,,b\,)$ បើគេដឹងថាចំនួន

$\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់ វិជ្ជមានដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\,,b\,)$ ÷

យក $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k$ ដែល $k\in IN^*$

គេបាន $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0 \quad (1)$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta=4k^2b^4-4k(b^3-1)$

$$\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2$$

សមីការ (1) មានចម្លើយក្នុង IN^* លុះត្រាតែ Δ ជាការេប្រាកដ

មានន័យថា $\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2=d^2$

ដែល d ជាចំនួនគត់។

-បើ $4k-b^2=0$ ឬ $k=\dfrac{b^2}{4}$

យើងទទួលបាន $a=2b^2k-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b^3-b}{2}$ ឬ $a=\dfrac{b}{2}$

ដោយ $a\,,b$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហេតុនេះគេត្រូវឲ្យ ÷

$b=2p \quad , \forall p\in IN$

គេទាញ $a = 2(2p)^2 \dfrac{(2p)^2}{4} - p = 8p^4 - p$

ហើយ $a = \dfrac{2p}{2} = p$ ។

ដូចនេះ

$(a , b) = (8p^4 - p , 2p) ; (p , 2p) , \forall p \in IN^*$

-បើ $4k - b^2 > 0$

គេបាន $(2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2 \geq (2b^2k - b + 1)^2 , \forall k \in IN^*$

ឬ $4k(b^2 - 1) + (b-1)^2 \leq 0$ គេទាញបាន $b = 1$

ក្នុងករណីសមីការ (1) ក្លាយជា $a^2 - 2ka = 0$ នាំឲ្យ $a = 2k$

ដូចនេះ $(a , b) = (2k , 1)$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

-បើ $4k - b^2 < 0$

គេបាន $(2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2 < (2b^2k - b - 1)^2$

សមមូល $(2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 - (2b^2k - b - 1)^2 < 0$

ឬ $b^2(4k - 3) + 2b(b-1) + (4k-1) < 0$ (មិនពិតក្នុង IN^*)

សរុបមកគេបានគូចម្លើយបីមានរាងដូចខាងក្រោម ៖

$(a , b) = (2k , 1) ; (k , 2k) ; (8k^4 - k , 2k)$

ដែល $k \in IN^*$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់ $m\,,\,n \ge 3$ បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a គេមាន $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន (m, n) ៖

ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $a^n + a^2 - 1$

ជាកត្តារួមនៃ $a^m + a - 1$ ហើយ $m > n$ ។

យើងយក $m = n + k \;\;,\; k \in IN^*$

$$a^m + a - 1 = a^{n+k} + a - 1$$
$$= a^k(a^n + a^2 - 1) + (1 - a)(a^{k+1} + a^k - 1)$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះដើម្បីឲ្យ $a^n + a^2 - 1$ ជាកត្តារួមនៃ $a^m + a - 1$

លុះត្រាតែ $n = k + 1$ និង $k = 2$ ។

ដូចនេះ $(m\,,\,n) = (\,5\,,\;3\,)$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចូរបង្ហាញថា $P_n = n(n+1)(n+2)....(n+k)$

ចែកដាច់នឹង $(k+1)!$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ និង $k \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $P_n = n(n+1)(n+2)....(n+k)$

ចំពោះ $n = 1$: $P_1 = 1\times 2\times 3....\times(k+1) = (k+1)!$ ចែកដាច់នឹង $(k+1)!$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = p$ គឺ P_p ចែកដាច់នឹង $(k+1)!$

គេបាន $P_p = p(p+1)(p+2)...(p+k) = (k+1)!q \ , q \in IN^*$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = p+1$ គឺ P_{p+1} ចែកដាច់នឹង $(k+1)!$

គេមាន $P_{p+1} = (p+1)(p+2)(p+3)...(p+1+k)$

$P_{p+1} - P_p = (p+1)(p+2)...(p+k)[(p+1+k)-p]$

$P_{p+1} = P_p + (k+1)(p+1)(p+2)...(p+k)$

ដោយ $C(p+k,k) = \dfrac{(p+k)!}{k!p!} = \dfrac{(p+1)(p+2)...(p+k)}{k!}$

គេបាន $P_{p+1} = (k+1)!q + (k+1)!C(p+k,p)$ ពិត

ដូចនេះ $P_n = n(n+1)(n+2)...(n+k)$ ចែកដាច់នឹង $(k+1)!$ ។

លំហាត់ទី២០ (IMO 1997)

គេឱ្យពីចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ។ ពេលដែល $\mathbf{a^2+b^2}$ ចែកនឹង $\mathbf{a+b}$ នោះគេបានផលចែក $\mathbf{q}$ និងសំណល់ $\mathbf{r}$ ។

ចូរកំណត់គ្រប់គូ $\mathbf{(a\,,b)}$ ដោយដឹងថា $\mathbf{q^2+r=1977}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូ $\mathbf{(a\,,b)}$

តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីតគេអាចសរសេរ $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)q+r}$ **(*)**

ដែល $\mathbf{0\le r\le a+b-1}$ ។

គេមាន $\mathbf{r\le a+b-1}$ នោះ $\mathbf{q^2+r\le q^2+a+b-1}$

ឬ $\mathbf{q^2+a+b-1\ge 1977}$

ឬ $\mathbf{q^2+a+b\ge 1978}$ **(**)**

គេមាន $\mathbf{r\ge 0}$ នោះ $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)q+r\ge(a+b)q}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}}$

គេបាន $\mathbf{(a+b)q\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}}$ ឬ $\mathbf{a+b\le 2q}$

តាមវិសមភាព **(**)** គេអាចសរសេរ $\mathbf{q^2+2q\ge 1978}$

ឬ $\mathbf{(q+1)^2\ge 1979=44^2+43}$

គេទាញ $\mathbf{q+1\ge 45}$ ឬ $\mathbf{q\ge 44}$

ម្យ៉ាងទៀត $q^2 \le q^2 + r = 1977 = 44^2 + 43$

គេទាញបាន $q \le 44$ ។

ពីលទ្ធផលខាងលើនេះគេទាញបាន :

$q = 44$ ហើយ $r = 1977 - 44^2 = 41$

សមីការ (*) អាចសរសេរ $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$

ឬ $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009$

តាង $u = |a-22|$ និង $v = |b-22|$ ដែល $u , v \in IN$

គេបានសមីការ $u^2 + v^2 = 1009$ ។

យើងដឹងថាគ្រប់ការេនៃចំនួនគត់មានលេខចុងក្រោយ $\{0,1,4,9,5,6\}$

ហេតុនេះផលបូកការេនៃពីចំនួនគត់ដែលមានលេខចុងក្រោយស្មើ 9 លុះត្រាតែ

លេខចុងក្រោយនៃការេចំនួននីមួយស្មើរៀងគ្នា 4 និង 5 ឬ 5 និង 4

ឬ 0 និង 9 ឬ 9 និង 0 ។

ពីសមីការ $u^2 + v^2 = 1009 = 31^2 + 48$ គេទាញបាន $0 \le u \le 31$

ឧបមាថា $u \ge v$ នោះ $2u^2 \ge u^2 + v^2 = 1009$

គេទាញ $u^2 \ge \frac{1009}{2} = 22^2 + \frac{41}{2}$ ឬ $u \ge 23$

ហេតុនេះ $23 \le u \le 31$ ។

ដោយ u^2 ត្រូវមានលេខចុងក្រោយ $\{0 , 4 , 5 , 9\}$

នោះគេអាចជ្រើសរើសតម្លៃ $\mathbf{u}$ ជាដំបូងដូចខាងក្រោម :

$\mathbf{u} \in \{30, 28, 25, 23, 27\}$

ដោយ $\mathbf{u^2 + v^2 = 1009}$ នោះ $\mathbf{v^2 = \sqrt{1009 - u^2}}$

-បើ $\mathbf{u = 30}$ នោះ $\mathbf{v = \sqrt{1009 - 900} = \sqrt{109}}$ មិនយក

-បើ $\mathbf{u = 28}$ នោះ $\mathbf{v = \sqrt{1009 - 784} = 15}$ យក

-បើ $\mathbf{u = 25}$ នោះ $\mathbf{v = \sqrt{1009 - 6225} = \sqrt{384}}$ មិនយក

-បើ $\mathbf{u = 23}$ នោះ $\mathbf{v = \sqrt{1009 - 529} = \sqrt{480}}$ មិនយក

-បើ $\mathbf{u = 27}$ នោះ $\mathbf{v = \sqrt{1009 - 729} = \sqrt{280}}$ មិនយក

ដោយ $\mathbf{u^2 + v^2 = 1009}$ ជាសមីការឆ្លុះហេតុនេះបើ $\mathbf{(a, b)}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការនោះ $\mathbf{(b, a)}$ ក៏ជាចម្លើយរបស់សមីការដែរ ។

គេទាញបានចម្លើយ $\mathbf{u = 28}$, $\mathbf{v = 15}$ ឬ $\mathbf{u = 15}$, $\mathbf{v = 28}$

-ករណី $\mathbf{u = 28}$, $\mathbf{v = 15}$ គេបាន $\begin{cases} \mathbf{|a - 22| = 28} \\ \mathbf{|b - 22| = 15} \end{cases}$

គេទាញបាន $\mathbf{a = 50, b = 37}$ ឬ $\mathbf{a = 50}$, $\mathbf{b = 7}$ ។

-ករណី $\mathbf{u = 15}$, $\mathbf{v = 28}$ គេបាន $\begin{cases} \mathbf{|a - 22| = 15} \\ \mathbf{|b - 22| = 28} \end{cases}$

$\mathbf{a = 37, b = 50}$ ឬ $\mathbf{a = 7}$, $\mathbf{b = 50}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{(a, b) = \{(50, 37); (37, 50); (7, 50); (50, 7)\}}$ ។

លំហាត់ទី២១ (IMO 1960)

គេឱ្យ $\mathbf{N}$ ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។ គេដឹងថា $\mathbf{N}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{11}$ ហើយ $\mathbf{N}$ ចែកនឹង $\mathbf{11}$ បានផលចែកស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខខ្ទង់របស់ $\mathbf{N}$ ។ ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ $\mathbf{N}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ $\mathbf{N}$

តាង $\mathbf{N = abc = 100a + 10b + c}$ $\mathbf{(1)}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{N}{11} = a^2 + b^2 + c^2}$ ឬ $\mathbf{N = 11(a^2 + b^2 + c^2)}$ $\mathbf{(2)}$

តាម $\mathbf{(1)}$ គេអាចសរសេរ $\mathbf{N = 11(9a + b) + a - b + c}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{N}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{11}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{a - b + c}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{11}$

ដោយ $\mathbf{1 \le a \le 9}$ និង $\mathbf{0 \le b \le 9}$, $\mathbf{0 \le c \le 9}$

គេបាន $\mathbf{-8 \le a - b + c \le 18}$ ហេតុនេះ $\mathbf{a - b + c = 0}$

ឬ $\mathbf{a - b + c = 11}$ ។

-ករណី $\mathbf{a - b + c = 0}$ ឬ $\mathbf{b = a + c}$

គេបាន $\mathbf{N = 11(9a + b) = 11(a^2 + b^2 + c^2)}$

ឬ $\mathbf{9a + a + c = a^2 + (a + c)^2 + c^2}$

ឬ $\mathbf{2a^2 + 2(c - 5)a + 2c^2 - c = 0}$ $\mathbf{(E_1)}$

ឌីសគ្រមីណង់សមីការ (E_1) គឺ $\Delta'_1 = (c-5)^2 - 2(2c^2 - c)$

ឬ $\Delta'_1 = -3c^2 - 8c + 25$ ។

សមីការ (E_1) មានឫសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_1 \geq 0$ និង Δ'_1

ជាការេប្រាកដ ។ ដោយ $\Delta'_1 < 0$ ចំពោះ $c \geq 2$ នោះ $c = 0$, $c = 1$

ដោយ Δ'_1 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $c = 0$ មួយគត់

ហេតុនេះសមីការ (E_1) ក្លាយជា $2a^2 - 10a = 0$ គេទាញបាន $a = 5$

ហើយ $b = a + c = 5 + 0 = 5$ ។

ដូចនេះ $a = 5$, $b = 5$, $c = 0$ ហើយ $N = 550$ ។

-ករណី $a - b + c = 11$ ឬ $b = (a + c) - 11$

គេបាន $N = 11(9a + b + 1) = 11(a^2 + b^2 + c^2)$

$9a + a + c - 11 + 1 = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2$

ឬ $2a^2 + 2(c - 32)a + 2c^2 - 23c + 131 = 0$ (E_2)

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E_2) គឺ :

$$\Delta'_2 = (c - 32)^2 - 2(2c^2 - 23c + 131)$$

$$= -3c^2 + 14c - 6$$

សមីការ (E_2) មានឫសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_2 \geq 0$ និង Δ'_1

ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ $\Delta'_2 < 0$ ចំពោះគ្រប់ $c \geq 5$ នោះ $c = \{1, 2, 3, 4\}$

ដោយ Δ'_2 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $\mathbf{c=3}$ មួយគត់

ហេតុនេះសមីការ $\mathbf{(E_1)}$ ក្លាយជា $\mathbf{2a^2-26a+80=0}$ គេទាញបាន

$\mathbf{a=5\ ;\ a=8}$ ។

- ចំពោះ $\mathbf{a=5\ ,\ c=3}$

នោះ $\mathbf{b=a+c-11=8-11=-3<0}$ មិនយក ។

-ចំពោះ $\mathbf{a=8\ ,\ c=3}$ នោះ $\mathbf{b=8+3-11=0}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{a=8\ ,\ b=0\ ,\ c=3}$ ហើយ $\mathbf{N=803}$ ។

លំហាត់ទី២២ (IMO 1978)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ដែល $\mathbf{1 \le m < n}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{m+n}$ ដើម្បីឱ្យចំនួន $\mathbf{1978^m}$ និង $\mathbf{1978^n}$

មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{m+n}$

ដើម្បីឱ្យចំនួន $\mathbf{1978^m}$ និង $\mathbf{1978^n}$ មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នា

លុះត្រាតែផលសង $\mathbf{d = 1978^n - 1978^m}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{1000}$ ។

គេមាន $\mathbf{d = 1978^m(1978^{n-m} - 1)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{1 \le m < n}$ ។

ដោយ $\mathbf{1000 = 8 \times 125}$ ហើយ $\mathbf{1978 = 989 \times 2}$ នោះដើម្បីឱ្យ

$\mathbf{d = 1978^m(1978^{n-m} - 1)}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{1000}$ លុះត្រាតែ

$\mathbf{1978^m}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{8}$ និង $\mathbf{1978^{n-m} - 1}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{125}$ ។

ចំនួន $\mathbf{1978^m = 989^m \times 2^m}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{8}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{m \ge 3}$

ហើយដោយ $\mathbf{1 \le m < n}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{n > m \ge 3}$ ។

គេមាន $\mathbf{1978 = 15 \times 125 + 103 = 125q_1 + 103}$ ដែល $\mathbf{q_1 = 15}$

ហើយ $\mathbf{1978^2 = (125q_1 + 103)^2 = 125q_2 + 103^2}$

តែដោយ $\mathbf{103^2 = 84 \times 125 + 109}$

នោះ $\mathbf{1978^2 = (q_2 + 84) \times 125 + 109}$

ឬ $1978^2 = 125q_3 + 109$ ដែល $q_3 = (q_2 + 4) \in IN^*$

លើកជាការេ $1978^4 = (125q_3 + 109)^2$

$$= 125q_4 + 109^2$$

$$= 125(q_4 + 95) + 6$$

$$= 125q_5 + 6 \;;\; q_5 = (q_4 + 95) \in IN^*$$

ហេតុនេះគ្រប់ $p \in IN^*$ គេបាន :

$$1978^{4p} = (125q_5 + 6)^p = 125q_6 + 6^p$$

ដោយ $6^p = (1+5)^p = \sum_{k=0}^{p} C(p,k).5^k$

$$= 1 + 5p + \frac{25p(p-1)}{2} + 125\sum_{k=3}^{p} C(p,k)5^{k-3}$$

គេបាន $1978^{4p} = 125q_7 + 1 + 5p + \frac{25p(p-1)}{2}$

ដែល $q_7 = q_6 + \sum_{k=3}^{p} C(o,k)5^{k-3}$ (ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

គេទាញ $1978^{4p} - 1 = 125q_7 + \frac{5p(5p-3)}{2}$

ដើម្បីឱ្យ$1978^{n-m} - 1$ ចែកដាច់នឹង 125 លុះត្រាតែ និងគ្រាន់តែឱ្យ

$n - m = 4p \;, p \in IN^*$ និង $\frac{5p(5p-3)}{2}$ ចែកដាច់នឹង 125

ដើម្បីឱ្យ $\frac{5p(5p-3)}{2}$ ចែកដាច់នឹង 125 លុះត្រាតែ p ជាពហុគុណនៃ 25

ពោលគឺ $p = 25k$, $\forall k \in IN^*$

ហើយដោយ $n - m = 4p$ នោះ $n - m = 100k$ និង $m \geq 3$

គេមាន $m + n = (n - m) + 2m \geq 100k + 6$ គ្រប់ $k \in IN^*$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $m + n$ គឺ 106 ដែលត្រូវនឹង $k = 1$ ។

លំហាត់ទី២៣ (IMO 1962)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត $\mathbf{n}$ ដោយដឹងថា ក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ $\mathbf{n}$ មានលេខ $\mathbf{6}$ ជាលេខចុងក្រោយបំផុត ។ បើគេលុបលេខ $\mathbf{6}$ ចុងក្រោយនោះចោលហើយយកទៅសរសេរពីខាងមុខនៃលេខដែលនៅសល់នោះគេបានចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង $\mathbf{4}$ នៃចំនួនដើម $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត $\mathbf{n}$

សន្មតថា $\mathbf{n}$ ជាចំនួនមានលេខ $\mathbf{k+1}$ ខ្ទង់នោះគេបាន :

$\mathbf{n = \overline{a_k a_{k-1} ....a_1 6} = 10.N + 6}$ ដែល $\mathbf{N = \overline{a_k a_{k-1} ....a_2 a_1}}$

យក $\mathbf{p = \overline{6a_k a_{k-1} ....a_1} = 6\times 10^k + N}$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសម្មតិកម្មគេបាន $\mathbf{p = 4\times n}$

គេទាញ $\mathbf{6\times 10^k + N = 4(10.N + 6)}$

គេទាញបាន $\mathbf{N = 2\times \dfrac{10^k - 4}{13}}$ ។ តម្លៃ $\mathbf{k}$ ដំបូងដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{10^k - 4}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{13}$ គឺ $\mathbf{k = 5}$ ហើយ $\mathbf{N = 2\times \dfrac{10^5 - 4}{13} = 15384}$

ដូចនេះ $\mathbf{n = 10N + 6 = 153846}$ ។

លំហាត់ទី២៤

ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ធម្មជាតិ (a,b) បើគេដឹងថា :

a^2+b^2 ចែកនឹង $a+b$ បានផលចែក 40 និងសំណល់ 53 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ធម្មជាតិ (a,b)

តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីតគេបាន :

$$a^2+b^2=40(a+b)+53$$
$$a^2+b^2-40a-40b=53$$
$$(a-20)^2+(b-20)^2=853$$

តាង $u=|a-20|\,;\ v=|b-20|$ ដែល $u,v\in\mathbb{N}^*$

គេបានសមីការ $u^2+v^2=853$ ។

យើងដឹងថាគ្រប់ការេនៃចំនួនគត់មានលេខចុងក្រោយ $\{0,1,4,9,5,6\}$

ហេតុនេះផលបូកការេនៃពីចំនួនគត់ដែលមានលេខចុងក្រោយស្មើ 3 លុះត្រាតែ

លេខចុងក្រោយនៃការេចំនួននីមួយស្មើរៀងគ្នា 4 និង 9 ឬ 9 និង 4 ។

ឧបមាថា $u\geq v$ នោះ $2u^2\geq u^2+v^2=853$

ឬ $u\geq\sqrt{\dfrac{853}{2}}>20$ ហើយ $u^2<u^2+v^2=853$ ឬ $u\leq 29$

ហេតុនេះ $21\leq u\leq 29$ ហើយ u^2 ត្រូវមានលេខចុងក្រោយ 4 ឬ 9

នោះគេបាន $u = 22$ ឬ $u = 23$ ឬ $u = 27$ ឬ $u = 28$ ។

តាមសមីការ $u^2 + v^2 = 853$ គេទាញ $v = \sqrt{853 - u^2}$

-បើ $u = 22$ នោះ $v = \sqrt{853 - 484} = \sqrt{369}$ មិនយក

-បើ $u = 23$ នោះ $v = \sqrt{853 - 529} = \sqrt{324} = 18$

-បើ $u = 27$ នោះ $v = \sqrt{853 - 729} = \sqrt{124}$ មិនយក

-បើ $u = 28$ នោះ $v = \sqrt{853 - 784} = \sqrt{69}$ មិនយក

ដោយសមីការ $u^2 + v^2 = 853$ មានលក្ខណៈឆ្លុះនោះគេទាញបានគូចម្លើយ

$u = 23 , v = 18$ ឬ $u = 18 , v = 23$

ដោយ $u = |a - 20| ; v = |b - 20|$ នោះគេទាញបានគូចម្លើយ

$(a,b) = (38,43) ; (43,38)$ ។

លំហាត់ទី២៥ **(Singapore National Mathematical Olympiad 2009)**

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$\mathbf{3.2^m + 1 = n^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$:

សមីការ $\mathbf{3.2^m + 1 = n^2}$ សមមូល $\mathbf{2^m = \frac{(n+1)(n-1)}{3}}$ **(*)**

សមីការនេះមានចម្លើយក្នុង $\mathbf{IN^*}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{\frac{n+1}{3}}$ ឬ $\mathbf{\frac{n-1}{3}}$ ជាចំនួនគត់ ។

-ករណី $\mathbf{\frac{n-1}{3}}$ ជាចំនួនគត់ :

ដោយអង្គទីមួយនៃសមីការ **(*)** ជាកត្តាស្វ័យគុណនៃ **2** និង

$\mathbf{\frac{n-1}{3} < n+1}$ នោះគេត្រូវ ឱ្យ $\mathbf{n+1 = \frac{n-1}{3}.2^k}$

ឬ $\mathbf{n = \frac{2^k+3}{2^k-3} = 1 + \frac{6}{2^k-3}}$ ដែល $\mathbf{k \in IN}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{n \in IN^*}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{\frac{6}{2^k-3} \in IN}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{k = 2}$

ហើយ $\mathbf{n = 7}$

ហើយតាម **(*)** គេបាន $\mathbf{2^m = \frac{8\times 6}{3} = 2^4 \Rightarrow m = 4}$ ។

-ករណី $\frac{n+1}{3}$ ជាចំនួនគត់ :

ដោយអង្គទីមួយនៃសមីការ (*) ជាកត្តាស្វ័យគុណនៃ 2 និង

$n-1>\frac{n+1}{3}$ គ្រប់ $n\ge 2$

នោះគេត្រូវឱ្យ $n-1=\frac{n+1}{3}.2^k$ ឬ $n=-\frac{2^k+3}{2^k-3}$ ដែល $k\in IN$

ដើម្បីឱ្យ $n\in IN^*$ លុះត្រាតែ $-\frac{2^k+3}{2^k-3}\in IN^*$ នោះគេទាញបាន

$k=0$, $k=1$ ហើយ $n=2$, $n=5$ ។

. ចំពោះ $n=2$ តាម (*) គេបាន $2^m=1\Rightarrow m=0$

មិនយកព្រោះ $m\in IN^*$ ។

. ចំពោះ $n=5$ តាម (*) គេបាន $2^m=2^3\Rightarrow m=3$ ។

ដូចនេះ $m=3$, $n=5$ ឬ $m=4$, $n=7$ ។

លំហាត់ទី២៦ (IMO 1967)

គេឱ្យ k , m , n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដោយដឹងថា $m+k+1$ ជាចំនួនបឋមធំជាង $n+1$ ។ គេយក $c_s = s(s+1)$ ។

ចូរស្រាយថាផលគុណ :

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាផលគុណ :

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$

តាង $P_n = \prod_{i=1}^{n}\left(c_{m+i}-c_k\right)$ និង $Q_n = \prod_{i=1}^{n}\left(c_i\right)$

គេមាន $c_x - c_y = (x-y)(x+y+1)$

គេបាន $P_n = \prod_{i=1}^{n}(m+i-k)(m+i+k+1)$

$$= \prod_{i=1}^{n}(m+i-k) \times \prod_{i=1}^{n}(m+i+k+1)$$

ឬ $P_n=\dfrac{(m+n-k)!}{(m-k)!}\times\dfrac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!}$

ហើយ $Q_n=\prod_{i=1}^{n}\left[i(i+1)\right]=n!(n+1)!$

គេបាន $\dfrac{P_n}{Q_n}=\dfrac{(m+n-k)!(m+n+k+1)!}{n!(n+1)!(m-k)!(m+k+1)!}$

គេមាន $C_{m+n-k}^{n}=\dfrac{(m+n-k)!}{n!(m-k)!}$

និង $C_{m+n+k+1}^{n+1}=\dfrac{(m+n+k+1)!}{(n+1)!(m+k)!}$

នោះ $\dfrac{P_n}{Q_n}=\dfrac{1}{m+k+1}.C_{m+n-k}^{n}.C_{m+n+k+1}^{n+1}$

គេមាន C_{m+n-k}^{n} ជាចំនួនគត់

ហើយ $\dfrac{1}{m+k+1}C_{m+n+k+1}^{n+1}=\dfrac{(m+n+k+1)!}{(n+1)!(m+k)!(m+k+1)}$

$$=\frac{(m+n+k+1)!}{(n+1)!(m+k+1)!}$$

តាមសម្មតិកម្ម $m+k+1$ ជាចំនួនបឋមធំជាង $n+1$ នោះវាគ្មានកត្តារួម

ជាមួយនឹង $(n+1)!$ ហើយ$(m+n+k+1)!$ ចែកដាច់នឹង $(n+k+1)!$

តាមទ្រឹស្តីបទ Gauss គេបាន $C_{m+n+k+1}^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង $m+k+1$

ដូចនេះ $(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$ ។

លំហាត់ទី២៧ (IMO 2005)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1, a_2, a_3, \dots$ កំណត់ដោយ $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះមានតែមួយគត់គឺ 1 ។

យើងនឹងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនបឋម p ចែកដាច់ a_n ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន n ។

សម្គាល់ឃើញថាចំពោះ $p = 2$ និង $p = 3$ ចែកដាច់

$a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$ ។

យើងឧបមាថា $p \geq 5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ **Fermat** យើងមាន

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

នោះ $3.2^{p-1} + 2.3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 3 + 2 + 1 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$

ឬ $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$

នោះ $6a_{p-2}$ ចែកដាច់នឹង p ។

ពីព្រោះតែ p បឋមទៅនឹង 6 នោះ a_{p-2} ចែកដាច់នឹង p ។

លំហាត់ទី២៨ (IMO Shortlist 2003)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេ ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់

$x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ ដែល $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3 = 2002^{2002}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ដែលតូចជាងគេគឺ $k = 4$ ។

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា 2002^{2002} មិនអាចជាផលបូកនៃគូបបីចំនួន ។

គេមាន $2002 \equiv 4 \pmod 9$ នោះ $2002 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod 9$

គេបាន $2002^{2002} = (2002^3)^{67}.2004 \equiv 4 \pmod 9$

ម្យ៉ាងទៀត $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x

ហេតុនេះ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ចែកនឹង 9 មិនអាចឱ្យសំណល់ស្មើ 4 បានទេ។

ដូចនេះ 2002^{2002} មិនអាចសរសេរជាផលបូកគូបប្រាកដនៃបីចំនួនគត់បានទេ។

យើងនឹងបង្ហាញថា 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃគូបប្រាកដនៃបួនចំនួនបាន ។ គេមាន $2002 = 1000 + 1000 + 1 + 1 = 10^3 + 10^3 + 1 + 1$

ដោយ $2002^{2002} = 2002^{2001} \times 2002$

$$= (2002^{667})^3(10^3 + 10^3 + 1 + 1)$$

$$= (2002^{667}.10)^3 + (2002^{667}.10)^3 + (2002^{667})^3 + (2002^{667})^3$$

ដូចនេះ $k = 4$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។ យក $\mathbf{p(n)}$ ជាផលគុណនៃតួលេខមិនសូន្យនៃ $\mathbf{n}$ ។

(បើ $\mathbf{n}$ មានលេខតែមួយ នោះ $\mathbf{p(n)}$ ស្មើនឹងលេខនោះ)

គេយក $\mathbf{S = p(1) + p(2) + ... + p(999)}$ ។

តើកត្តាបឋមធំជាងគេនៃ $\mathbf{S}$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

កត្តាបឋមធំជាងគេនៃ $\mathbf{S}$

តាមបំរាប់ $\mathbf{p(n)}$ ជាផលគុណនៃតួលេខមិនសូន្យនៃ $\mathbf{n}$

បើ $\mathbf{n = \overline{abc}}$ នោះ $\mathbf{p(n) = p(\overline{abc}) = p(a)p(b)p(c)}$

ហើយ $\mathbf{p(n) = n}$ ចំពោះ $\mathbf{1 \le n \le 9}$ និង $\mathbf{p(0) = 1}$ ។

យក $\mathbf{T = p(0) + p(1) + ... + p(999)}$ នោះ $\mathbf{S = T - p(0) = T - 1}$

តាង $\mathbf{k = p(0) + p(1) + p(2) + ... + p(9) = 1 + 1 + 2 + ... + 9 = 46}$

គេបាន $\mathbf{T = \sum_{n=0}^{999} p(n) = \sum_{0\le a,b,c\le 9} p(\overline{abc}) = [\sum_{0\le a\le 9} p(a)]^3 = k^3}$

ហេតុនេះ $\mathbf{S = T - 1 = 46^3 - 1 = (46 - 1)(46^2 + 46 + 1) = 3^3 \times 5 \times 7 \times 103}$

ដូចនេះ $\mathbf{103}$ ជាកត្តាបឋមធំជាងគេរបស់ $\mathbf{S}$ ។

លំហាត់ទី៣០ (IMO 1976)

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ :

$$u_0 = 2 \ , \ u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n({u_{n-1}}^2 - 2) - u_1$$ ចំពោះ $n = 1, 2, ...$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $[\,u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$

(ដែល $[x]$ តាងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង x)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $[\,u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$

ជាដំបូងយើងគណនាតួ u_2, u_3, u_4 , u_5 គេបានលំនាំដូចខាងក្រោម :

$$u_0 = 2 = 2^0 + \frac{1}{2^0} \quad , \quad u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}$$

$$u_2 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1} \ , \quad u_3 = 2^3 + \frac{1}{2^3}$$

$$u_4 = 2^5 + \frac{1}{2^5} \quad , \quad u_5 = 2^{11} + \frac{1}{2^{11}}$$

យើងសង្កេតឃើញថាកន្សោម u_n មានរាងទូទៅ $u_n = 2^{V_n} + \frac{1}{2^{V_n}}$

ដែល (V_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $(V_n) : 0, 1, 1, 3, 5, 11, ...$

តាងស្វ៊ីត (w_n) ដែល $w_n = V_n + V_{n+1}$ គ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន : $(W_n): 1 , 2 , 4,8,16,....$ នាំឱ្យ (W_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

មានតួ $W_0 = 1$ និង រេសុង $q = 2$ ។

គេបាន $W_n = 2^n$ នោះ $V_{n+1} + V_n = 2^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(-1)^{n+1}$ គេបាន :

$$(-1)^{n+1} V_{n+1} - (-1)^n V_n = (-1)^{n+1} 2^n$$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} V_{k+1} - (-1)^k V_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} 2^k\right]$

$$(-1)^n V_n - V_0 = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{3}$$

ដោយ $V_0 = 0$ នោះ $V_n = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{(-1)^n .3} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$

ដូចនេះ $[\, u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

ដោយ $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$ នោះ $3 | 2^n - (-1)^n$

ហើយ $2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}} < 1$ ដូចនេះ $[\, u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$ ។

–

លំហាត់ទី៣១ (IMO 2010)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថាសមភាព

$\mathbf{f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor}$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

($\lfloor \mathbf{a} \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\mathbf{a}$) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$

គ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ គេមានសមភាព

យក $\mathbf{x = 0}$ និង $\mathbf{y = 0}$ គេបាន $\mathbf{f(0) = f(0) \lfloor f(0) \rfloor}$

គេទាញ $\mathbf{f(0)(1 - \lfloor f(0) \rfloor) = 0}$ នោះ $\mathbf{f(0) = 0}$ ឬ $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

-ករណី $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

យក $\mathbf{y = 0}$ ជំនួសក្នុង **(*)** គេបាន $\mathbf{f(0) = f(x) \lfloor f(0) \rfloor}$

ឬ $\mathbf{f(x) = f(0)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ថេរ

តាង $\mathbf{f(x) = c}$ ជំនួសក្នុងសមីការ **(*)** គេបាន $\mathbf{c = c \lfloor c \rfloor}$

នោះ $\mathbf{c = 0}$, $\mathbf{\lfloor c \rfloor = 1}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{f(x) = 0}$ ឬ $\mathbf{f(x) = c}$ ដែល $\mathbf{c \in [1, 2)}$ (ព្រោះ $\mathbf{\lfloor c \rfloor = 1}$)

-ករណី $f(0)=0$

យក $x=y=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(1)\lfloor f(1)\rfloor$

នោះ $f(1)=0$ ឬ $\lfloor f(1)\rfloor=1$

ក. ចំពោះ $f(1)=0$ នោះយើងយក $x=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$f(y)=f(1)\lfloor f(y)\rfloor=0 \ \forall y\in IR$ ។

ខ. ចំពោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ នោះយើងយក $y=1$ គេបាន $f(\lfloor x\rfloor)=f(x)$ (**)

យក $x=2$, $y=\dfrac{1}{2}$ ក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(2)\left\lfloor f(\dfrac{1}{2})\right\rfloor$

តែតាម (**) គេបាន $f(\dfrac{1}{2})=f(0)=0$ ហេតុនេះគេទាញបាន $f(1)=0$

មិនពិតព្រោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ ។

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=0 , \forall x\in IR$

ឬ $f(x)=c$, $\forall x\in IR$ ដែល $1\le c<2$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេដឹងថា $\mathbf{1002004008016032}$ មានកត្តាបឋម $p > 250000$

ចូរកំណត់កត្តាបឋមនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កត្តាបឋម

ដោយជ្រើសរើស $a = 1000$, $b = 2$ គេបាន :

$$
\begin{aligned}
1002004008016032 &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \\
&= \frac{a^6 - b^6}{a - b} \\
&= (a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \\
&= (1002)(1002004)(998004) \\
&= 4^2.1002.250501.k
\end{aligned}
$$

ដែល $k < 250000$ នោះ $p = 250501$ ។

លំហាត់ទី៣៣ (IMO 1984)

ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដោយដឹងថា :

$(i):\ \ ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

$(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b :

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេបាន :

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

តាមបម្រាប់គេមាន $(i):\ \ ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7

លុះត្រាតែ a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3 ។

គេមាន $(a+b)^2>a^2+ab+b^2\ge 7^3$ នោះ $a+b\ge 19$

ដោយធ្វើការសាកល្បងជំនួស $a=1\ ,\ b=18$ នោះគេបាន :

$$a^2+ab+b^2=1^2+1\times 18+18^2=343=7^3$$

ដូចនេះគូ $a=1\ ,\ b=18$ ជាចម្លើយ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទអឺលែ :

បើ $GCD(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,n)$ ។

គេមាន $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $a^2 + ab + b^2$ ចែកដាច់នឹង 7^3 លុះត្រាតែ

$a^3 \equiv b^3 \pmod{7^3}$ និង $a - b$ ចែកមិនដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\phi(7^3) = 7^3 - 7^2 = 6 \times 7^2 = 3 \times 98$ ។

បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកមិនដាច់នឹង 7 នោះគេបាន

$(c^{98})^3 \equiv 1 \pmod{7^3}$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $a^3 \equiv 1 \pmod{7^3}$ លុះត្រាតែ $a = c^{98}$

ឧទាហរណ៍ :

-បើគេយក $c = 2$ នោះ $2^{98} \equiv 18 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(2^{98}\right)^3 \equiv 18^3 \equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a = 18$, $b = 1$ ជាចម្លើយមួយ ។

-បើគេយក $c = 3$ នោះ $3^{98} \equiv 324 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(3^{98}\right)^3 \equiv 324^3 \equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a = 324$, $b = 1$ ជាចម្លើយផ្សេងមួយទៀត ។

ឯកសារយោង

1. គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កំរិតខ្ពស់ (បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ២០១០)

2.គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច (ភាគ១ នព្វន្ត) របស់លោក **លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ**

3. **104 NUMBER THEORY PROBLEMS**

(Tutu Andreescu , Dorin Andrica , Zuming FenG)

4. **The theory of numbers an Introduction**

(Anthony A.Gioia)

5. **250 Problems in elementary number theory**

(Waclaw Sierpinski)

6. **Introduction to number theory**

(James E.Shokley)