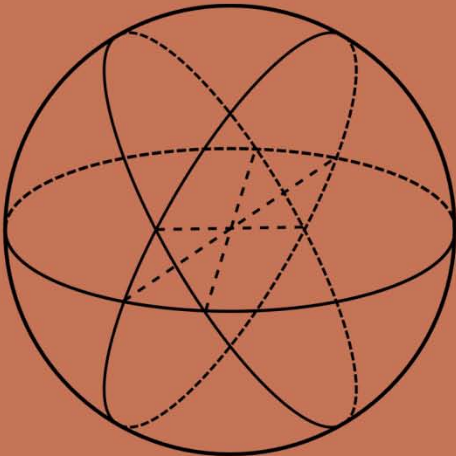
គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ធរណីមាត្រ

សំរាប់ការប្រលងសិស្សពូកែ និង ប្រលងប្រជែងនានា



-ទ្រឹស្តី
-ឧទាហរណ៍
-វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ
-លំហាត់
-ដំណោះស្រាយ

រៀបរៀងដោយ ហេង សុខា

គណិតវិទ្យា

ធរណីមាត្រ

សំរាប់ការប្រលងសិស្សពូកែ និង ប្រលងប្រជែងនានា

រៀបរៀងដោយ ហេង សុខា

សហការណ៏ដោយ

ឈួរ គីមហ៊ី

ង៉ូវ ម៉េងតាំង

មាតិកា

ជំពូក ១ សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

១. ទំនាក់ទំនងក្នុងត្រីកោណ

និមិត្តសញ្ញាដែលប្រើ:

a, b, c	: រង្វាស់ជ្រុងដែលឈមមុំ A, B, C នៃ ΔABC
S	: ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ
p	: កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ
h_a, h_b, h_c	: ប្រវែងកំពស់គូសចេញពីកំពូល A, B, C
l_a, l_b, l_c	: ប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង
m_a, m_b, m_c	: ប្រវែងមេដ្យានគូសចេញពីកំពូលទាំងបី
r_a, r_b, r_c	: ប្រវែងកាំរង្វង់
R	: ប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC
r	: កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC

១.ទ្រឹស្តីបទស៊ីនីស:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

២. ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនីស:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

៣. ទ្រឹស្តីបទចំនោលៈ

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

៤. រូបមន្តក្រលាផ្ទៃៈ

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$
$$= 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$$

៥. រូបមន្តកាំចារឹកក្នុងៈ

$$r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$
$$= (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{b\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

៦. រូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង:

$$l_a = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2}{a+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

$$l_b = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$$

$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$$

៧. រូបមន្តមេដ្យាន:

$$4{m_a}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$4{m_b}^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 = c^2 + a^2 + 2ca\cos B$$

$$4{m_c}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$$

២. វិសមភាព

១. វិសមភាព Cauchy:

1. $\forall\ a,\ b \in R^{+}$ គេបាន $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ។

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $a=b$ ។

2. ជាទូទៅ $\forall a_i \in R\,(i=1,2,3.......,n)$ គេបាន :

$$a_1+a_2+a_3+....+a_n \geq n\sqrt{a_1 a_2 a_3....a_n}$$

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $a_1=a_2=a_3=.......=a_n$ ។

២. វិសមភាព Bernoulli:

1. $\forall x>-1,\ n\in N^{*}$ គេបាន: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ។

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $x=0$ រឺ $n=1$ ។

2. $\forall x>-1,\ r\in Q,\ r\geq 1$ គេបាន $(1+x)^r \geq 1+rx$ ។

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $x=0$ រឺ $r=1$ ។

3. $\forall x>-1,\ r\in Q,\ 1\leq r\leq 1$ គេបាន $(1+x)^r \leq 1+rx$ ។

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $x=0$ រឺ $r=1$ ។

៣. វិសមភាព Bunyakovsky:

1. $\forall a,b,c,d\in R$ គេបាន: $|ac+bd| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

   រឺ $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ។

2. $\forall a_i, b_i \in R\ (i = 1, 2, 3, ..., n)$ គេបាន:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ ។

៤. វិសមភាព Minkowski:

1. $\forall a, b, c, d \in R$ គេបាន: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$ ។

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ។

2. $\forall a_i, b_i \in R\ (i = 1, 2, 3, ..., n)$ គេបាន:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}$$
$$\le \sqrt{a_1^2 + b_2^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

   សមភាពកើតឡើងកាលណា $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ ។

៥. វិសមភាពត្រីកោណ:

បើ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ គេបានវិសមភាព:

1. $|b - c| < a < b + c$

2. $|a - c| < b < a + c$

3. $|a - b| < c < a + b$

៣. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១. ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$

3. $\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$

២. រូបមន្តផលបូក និង ផលដក:

1. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

2. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

3. $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

4. $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \quad \left(a,\ b,\ (a+b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \quad \left(a,\ b,\ (a-b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

៣. រូបមន្តមុំ 2α និង 3α :

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 2. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

3. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

4. $\cos 2\alpha = \cos^2 - \sin^2\alpha$

5. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

6. $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

7. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

8. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

9. $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

10. $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

៤. រូបមន្តកន្លះមុំ:

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

3. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

4. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

៥. គណនា $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ ជាអនុគមន៍ t $(t = \tan\dfrac{\alpha}{2})$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

៦. រូបមន្តបំលែង:

៦.១ បំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

1. $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

2. $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

4. $\sin b \sin a = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

៦.២ បំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

2. $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

4. $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

5. $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

6. $\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

7. $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$

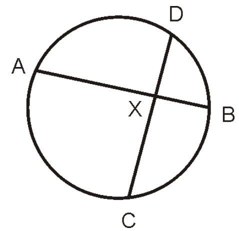
8. $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

៤.បណ្ដាទ្រឹស្ដីបទផ្សេងទៀត

១. ទ្រឹស្ដីបទអង្កត់ធ្នូប្រសព្វគ្នា:

បើអង្កត់ធ្នូ AB & CD នៃរង្វង់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ X នោះ

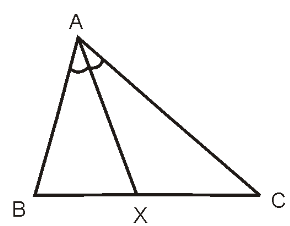
$$AX.XB = CX.XD$$



២. ទ្រឹស្ដីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

បើ AX ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle A$ នៃ ΔABC គេបាន:

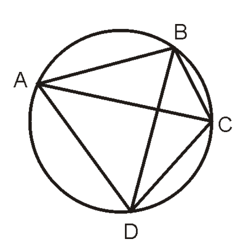
$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$$



៣. ទ្រឹស្ដីបទ Ptolémé

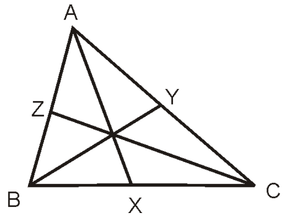
បើ ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ និង មាន AC & CD ជាអង្កត់ទ្រូង គេបាន:

$$CD.AB + BC.AD = AC.BD$$



៤. <u>ទ្រឹស្តីបទ Céva:</u>

បើ X, Y, Z ជាចំនុចនៅលើជ្រុង BC, AC , AB នៃ ΔABC ដែល AX, BY, & CZ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុចតែមួយ គេបាន៖

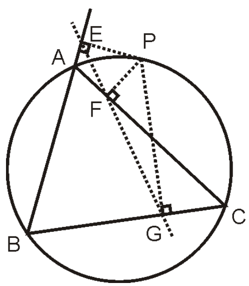


$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

(បំនកស្រាយនៅលំហាត់លេខ ៦៦)

៥. <u>ទ្រឹស្តីបទ Simson:</u>

គេអោយ P ជាចំនុចនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC និង E F, G ជាជើងចំនោលកែងពី P ទៅលើជ្រុងទាំង3នៃ ΔABC គេបាន៖ E, F, G រត់ត្រង់គ្នា។



(បំនកស្រាយនៅលំហាត់លេខ ៦៧)

ជំពូក ២ លំហាត់

១. បណ្តាលំហាត់ទាក់ទងនឹងរូបមន្តទំនាក់ទំនងក្នុងត្រីកោណ

០១. បង្ហាញថាក្រលាផ្ទៃ ΔABC ផ្ទៀងផ្ទាត់ $S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$ ។

០២. តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។ ស្រាយថា:

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

០៣. ក្នុង ΔABC, AM ជាមេដ្យាន ហើយ $A\hat{M}B=\alpha$ ។ ស្រាយថា $\cot\alpha=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}$ ។

០៤. ក្នុង ΔABC, CM ជាមេដ្យាន ហើយ $A\hat{C}M=\alpha; B\hat{C}M=\beta$ ។

a. ស្រាយថា $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

b. គណនាមុំ A, B, C ជាអនុគមន៍ α, β ។

០៥. ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ហើយ AB = a, BC = b, CD = c, DA = d ។

ស្រាយថា: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$ ដែល $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ ។

០៦. ស្រាយថាគ្រប់ ΔABC គេបាន: $(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0$ ។

០៧. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើមេដ្យាន AA’ និង BB’ នៃ ΔABC កែងគ្នា គេបាន:

$$\cot C=2(\cot A+\cot B)$$

០៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចតុកោណABCD គេបានវិសមភាព $AB + DC < AC + BD$ ។

០៩. ក្នុងចតុកោណប៉ោង ABCD មាន O ជាចំនុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង ហើយ S ជាក្រលាផ្ទៃ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \geq 2S$ (សមភាពកើតឡើងនៅពេលណា) ។

១០. គេអោយ ΔABC មានក្រលាផ្ទៃស្មើ 1 និងរង្វាស់ជ្រុង a, b, c $(a \geq b \geq c)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b \geq \sqrt{2}$ ។

១១. គេអោយ ΔABC មានក្រលាផ្ទៃ S ។ ចតុកោណកែង MNPQ ចារឹកក្នុង ΔABC ។ $M \in (AB), N \in (AC), P \& Q \in (BC)$ ។ តាង S' ជាក្រលាផ្ទៃ MNPQ ។ ស្រាយថា $S \geq 2S'$ ។

១២. ABCD ជាការេឯកតាមានជ្រុងស្មើ ១ ។ M ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង [AD] & N ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង [CD] ដែល $M\hat{B}N = 45^o$ ។ ស្រាយថា $\sqrt{2} - 1 \leq S_{MBN} \leq \frac{1}{2}$ ។

១៣. គេអោយចតុកោណ ABCD; O ជាចំនុចប្រសព្វអង្កត់ទ្រូង ។ តាង $S_1=S_{AOB}$; $S_2=S_{COD}$ $S=S_{ABCD}$ ។ ស្រាយថា $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$ ។

១៤. គេអោយចតុកោណ ABCD មានក្រលាផ្ទៃ S ។ ស្រាយថា $S \leq \frac{1}{8}(AC+BD)^2$ ។

១៥. គេអោយ ΔABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។ H ជាអរតូសង់នៃ ΔABC ហើយ AM; BN; CL ជាកំពស់ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $\frac{HM}{AM}+\frac{HN}{BN}+\frac{HL}{CL}=1$

b. $\frac{AM}{HM}+\frac{BN}{HN}+\frac{CL}{HL}\geq 9$

c. $AM.HM\leq\frac{BC^2}{4}$

១៦. គេអោយ ΔABC & O ជាចំនុចមួយស្ថិតក្នុងត្រីកោណ ។ បន្ទាត់ OA; OB; OC កាត់ BC; CA; AB រៀងគ្នាត្រង់ P; Q; R ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=1$

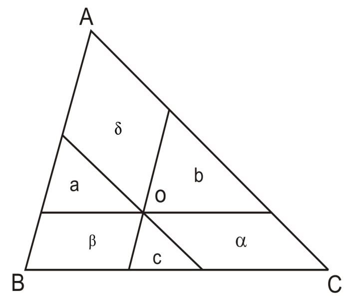
b. $\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}\geq 9$

១៧. គេអោយការេ QPSR ចារឹកក្នុង ΔABC កែងត្រង់ A ដែល P; R នៅលើជ្រុង AB & AC ហើយ Q & R នៅលើជ្រុង BC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BC\geq 3QR$ តើសមភាពកើតនៅពេលណា ?

១៨. គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD ។ ស្រាយថា $AB.CD+AD.BC\geq AC.BD$ ។

១៩. គេអោយ ΔABC; O ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ។ AO; BO; CO កាត់ BC; CA & AB ត្រង់ P; Q; R ។ ស្រាយថា $\sqrt{\frac{OA}{OP}}+\sqrt{\frac{OB}{OQ}}+\sqrt{\frac{OC}{OR}}\geq 3\sqrt{2}$ ។

២០. តាមចំនុច O នៅក្នុង ΔABC គូសបន្ទាត់បីស្របរៀងគ្នានឹងជ្រុង (AB); (BC); (CA) ដូចរូបខាងស្តាំ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\delta}\geq\frac{3}{2}$ ។ បំរាប់ a; b; c ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ហើយ α; β; δ ជាក្រលាផ្ទៃចតុកោណ ។



២១. គេអោយត្រីកោណ ABC មាន AM ជាមេដ្យាន ។

1. បើ $A<\frac{\pi}{2}$ ស្រាយថា: a. $BC^2 < AB^2 + AC^2$

b. $BC < 2AM$

2. បើ $A>\frac{A}{2}$ ស្រាយថា: a. $BC^2 > AB^2 + AC^2$

b. $BC > 2AM$

២២. គេអោយត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។ D ជាជើងកំពស់គូសចេញពី A ។ យក O_1; O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABD & ΔACD ។ បន្ទាត់កាត់តាម O_1; O_2 កាត់ (AB) & (AC) ត្រង់ E & F ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2S_{AEF} \leq S_{ABC}$ ។

២៣. គេអោយត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងអស់ជាមុំស្រួច ។ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ និង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុង ។ ស្រាយថា $(AH+BH+CH)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ ។

២៤. គេអោយត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងគូសចេញពី A កាត់ BC ត្រង់ A_1 និងរង្វង់ត្រង់ A_2 ។ ដូចគ្នាចំពោះកន្លះបន្ទាត់ពុះគូសចេញពី B & C កាត់ត្រង់ B_1; B_2; C_1; C_2 ។ ស្រាយថា $S=\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{AB_2+B_2C}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\geq\frac{3}{4}$ ។

២៥. គេអោយចតុកោណ ABCD មាន AB=a; CD=c; AD=BC; $A\hat{D}C+D\hat{C}B=90^o$ ។ M, N, P, Q ជាចំនុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ AB, AC, CD, BD ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{MNPQ}\geq\frac{(a-c)^2}{8}$ ។

២៦. គេអោយΔមានរង្វាស់ជ្រុង a; b; c & កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំទាំងបីមានប្រវែង l_a; l_b; l_c ។

ស្រាយថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}$ ។

២៧. គេអោយ ΔABC មាន A > B > C ។ O ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ។ បណ្ដាបន្ទាត់ (AO); (BO); (CO) កាត់ BC; CA; AB ត្រង់ P; Q; R ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា OP + OQ + OR < BC ។

២៨. គេអោយ ΔABC មាន O ឋិតនៅក្នុងត្រីកោណនោះ ។ បណ្ដារបន្ទាត់ AO; BO; CO កាត់ BC; CA; AB ត្រង់ D; E; F ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=2$

b. $\frac{OA}{OD}+\frac{OB}{OE}+\frac{OC}{OF}\geq 6$

២៩. គេអោយ ΔABC មានមុំ B ជាមុំទាល ។ នៅលើ (BC) គេដៅពីរចំនុច M; N ដែល BM=CN ។ ស្រាយថា AB + AC > AM + AN ។

៣០. ក្នុង ΔABC ដៅ A_1 លើ BC; B_1 លើ CA; C_1 លើ AB ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម ΔAB_1C_1; ΔBC_1A_1; ΔCA_1B_1 មានក្រលាផ្ទៃតូចជាងឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃក្រលាផ្ទៃ ΔABC ។

៣១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ ΔABC គេបាន: $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^2}{8}$ ។

៣២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $l_a r_a + l_b r_b + l_c r_c \le p^2$ ។

៣៣. គេអោយ P ជាចំនុចមួយនៅក្នុង ΔABC ។ ចំងាយពី P ទៅកំពូល A, B, C គឺ x, y, z និង ចំងាយពី P ទៅ ជ្រុង AB, BC, CA គឺ p, q, r ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $x + y + z \ge 2(p + q + r)$

b. $xyz \ge 8pqr$

៣៤. កំនត់តំលៃ p តូចបំផុតដែលគេអាចទាញបាន $S^2 \le p(a^4 + b^4 + c^4)$ ។

៣៥. គេអោយត្រីកោណ ABC មានក្រលាផ្ទៃ S និង m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យានគូសចេញពីកំពូលទាំង ៣ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge 3\sqrt{3}S$ ។

៣៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \ge \sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$ ។

៣៧. គេអោយត្រីកោណ ABC មានក្រលាផ្ទៃ S និង មានប្រវែងជ្រុង a, b, c ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 16S^2$ ។

៣៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ។

៣៩. គេអោយត្រីកោណ ABC ដែលមាន $A\geq B\geq C$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}$$

៤០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq\frac{R+r}{r}$ ។

៤១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right)\geq 27S^2$ ។

៤២. គេអោយ ΔABC មានមុំស្រួចបី ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

ក. $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

ខ. $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geq\frac{2}{r}$

សញ្ញា (=) កើតមាននៅពេលណា ?

៤៣. គេអោយ ΔABC មានកំពូល C ។គេយក $\frac{AC}{AB}=k\ (k\neq 1)$ ។ គូសកន្លះបន្ទាត់ពុះ CM , AN និង BP ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក) $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}}=\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ ខ) $S_{MNP}<\frac{S_{ABC}}{4}$

៤៤. គេអោយΔABC មានទីប្រជុំទំងន់ G និង ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ R ។ បណ្តាមេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូល A , B , C កាត់ផ្ទូររង្វង់រៀងគ្នាត្រង់ D , E , F ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{3}{R}\leq\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\leq\sqrt{3}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right)$ ។

៤៥. គេអោយΔABC, តាង D ជាចំនុចនៅលើជ្រុង BC ។ នៅលើបណ្តាជ្រុង AB និង AC គេដៅ ចំនុច P និង Q រៀងគ្នា ។ បណ្តាបន្ទាត់ដែលគូសចេញពី P និង Q ស្របនឹង AD ហើយកាត់ជ្រុង BC ត្រង់ N និង M ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $S_{MNPQ} \le \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$ ។ សមភាពកើតមានឡើងនៅពេលណា ?

៣. បណ្តាលំហាត់ទាក់ទងតំលៃតូចនិងធំបំផុត

៤៦. គេអោយ ΔABC មានរង្វាស់ជ្រុង a, b, c និងបរិមាត្រ 10cm ។ គណនាក្រលាផ្ទៃធំបំផុតនៃ ΔABC រួចកំនត់ប្រភេទត្រីកោណដែលមានក្រលាផ្ទៃធំបំផុតនេះ ។

៤៧. គេអោយ ΔABC មានមុំបីជាមុំស្រួច ។ ពីចំនុច I មួយឋិតនៅក្នុង ΔABC គូស IH, IK, IL កែងនឹង BC, CA, & AB ។ រកទីតាំងចំនុច I ដែលធ្វើអោយ $AK^2 + BH^2 + CK^2$ តូចបំផុត ។

៤៨. គេអោយការេ ABCD មានរង្វាស់ជ្រុង a ។ H ជាចំនុចមួយនៅលើ [AC] ។ E & F ជាចំនោលកែងនៃ H លើ [AB] & [BC] ។ កំនត់ទីតាំង H ដើម្បីអោយ S_{DEF} មានតំលៃតូចបំផុត ។

៤៩. គេអោយត្រីកោណសម័ង្ស ABC; ចំនុច M & N នៅលើ [AB] & [AC] ដែល $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ ។ រកទីតាំងចំនុច M & N ដើម្បីអោយ S_{AMN} ធំបំផុត ។

៥០. គេអោយ ΔABC មាន $\angle A=30^o$, AB=c, AC=b, និង មេដ្យាន AM ។

គូសបន្ទាត់(d)មួយ កាត់តាមទីប្រជុំទំងន់ G នៃ ΔABC ហើយកាត់ AB ត្រង់ P និងកាត់ AC ត្រង់ Q ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=3$

ខ. តាង AP=x, រកតំលៃអតិបរមានិងតំលៃអប្បបរមានៃ x ។

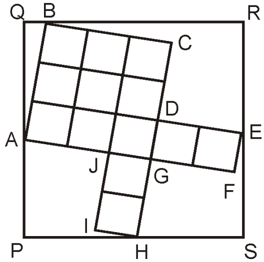
៥១. គេអោយការេ ABCD មានប្រវែងជ្រុង a ។ តាង M,N,P ជាបីចំនុចរៀងគ្នានៅលើបណ្តាជ្រុង BC, CD, DA ដែលΔMNP ជាត្រីកោណសម្ង័ង ។

ក) បង្ហាញថា : $CN^2 - AP^2 = 2\ DP.BM$ ។

ខ) កំនត់ទីតាំង M,N,P ដើម្បីអោយΔMNP មានក្រលាផ្ទៃតូចបំផុត ។

៤. បណ្តាលំហាត់ចំរុះ

៥២. នៅលើជ្រុង AC នៃ ΔABC ដៅចំនុច E ។ តាម E គូស (DE)//(BC) & (EF)//(AB) ។ ស្រាយថា $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$ ។

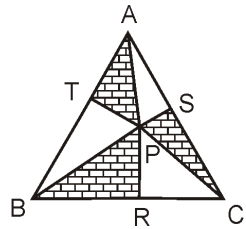


៥៣. តំបន់ ABCDEFGHIJ ផ្ទុកការេចំនួន 13 ប៉ុនៗគ្នា ហើយ តំបន់នេះចារឹកក្នុងចតុកោណកែង PQRS(មើលរូប).

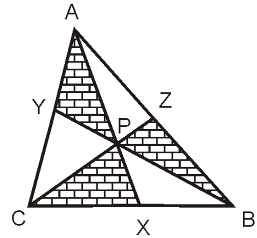
គេអោយ PQ = 28 & QR = 26 ។

គណនាក្រលាផ្ទៃតំបន់នេះ ។

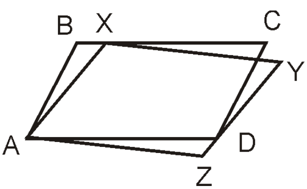
៥៤. ក្នុងរូបខាងស្តាំ ΔABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ហើយ P ជាចំនុច មួយក្នុងត្រីកោណ ។ បន្ទាត់កែង PR, PS & PT ត្រូវបានគូស ចេញពីចំនុច P ទៅកាន់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា ផលបូកក្រលាផ្ទៃឆ្នូតទាំងបីស្មើ $\frac{1}{2}$ នៃក្រលាផ្ទៃ ΔABC ។



៥៥. តាមចំនុច P ក្នុង ΔABC បន្ទាត់ AX, BY, CZ ត្រូវបាន គូសដូចបានបង្ហាញ ។ បង្ហាញថាបើត្រីកោណដែលមានផ្ទៃឆ្នូត ទាំងបីមានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា នោះត្រីកោណតូចទាំង6មាន ក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា ។

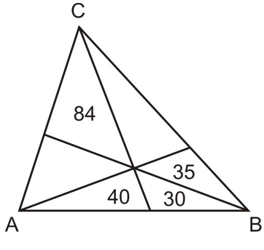


៥៦. ក្នុងរូបខាងស្តាំ ABCD & AXYZ ជាប្រលេឡូក្រាម ដែល X នៅលើ [BC] និង D នៅលើ [YZ] ។ បង្ហាញថា ប្រលេឡូក្រាមទាំងពីរមានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា ។



៥៧. ក្នុងរូបខាងស្តាំ បន្ទាត់ឈរមានប្រវែង 5cm កែងបន្ទាត់ដេកដែល មានប្រវែង$10\sqrt{3}$ cm ត្រង់ចំនុចកណ្តាល ហើយធ្នូកោងជាផ្នែកមួយ នៃរង្វង់ ។ គណនាក្រលាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយធ្នូកោង និង បន្ទាត់ដេក ។

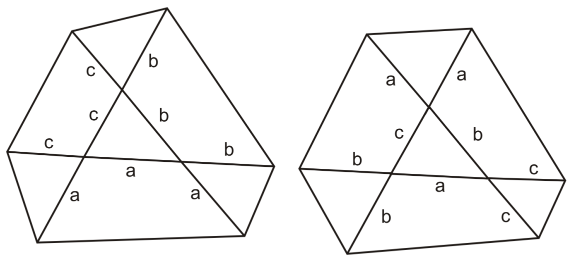
៥៨. តាមចំនុចមួយក្នុង ΔABC គេគូសបន្ទាត់ចេញពីកំពូល ត្រីកោណកាត់តាមចំនុចនេះ ហើយចែក ΔABC ជា 6 ផ្នែក ។ បួនចំនែកមានក្រលាផ្ទៃ ដូចបានបង្ហាញ ។ គណនា S_{ABC} ។



៥៩. ΔABC មាន $AC = 7; BC = 24; \hat{C} = 90^o$ ។ M ជាចំនុចកណ្តាល [AB]; D នៅតែម្ខាងនៃ(AB) ជាមួយ C និង $DA = DB = 15$ ។ រកក្រលាផ្ទៃ ΔCDM ។

៦០. គេអោយ ΔABC មានក្រលាផ្ទៃ 1 ឯកតា ។ X, Y, Z ជាចំនុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ [AB], [BC], [AC] រៀងគ្នាដែល $\frac{AX}{AB} = \frac{BY}{CB} = \frac{CZ}{CA} = \frac{1}{3}$ ។ គណនាក្រលាផ្ទៃ ΔXYZ ។

៦១. ΔABC ជាត្រីកោណដែលគេអោយមុន ។ ប្រៀបធៀបក្រលាផ្ទៃឆកោណទាំងពីរ ។



៦២. [BC] ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត O ។ A ជាចំនុចមួយនៅលើរង្វង់ដែលមុំ $A\hat{O}C > 60^o$ ។ [EF] ជាអង្កត់ធ្នូ និងជាមេដ្យាទ័រនៃ [AO] ។ D ជាចំនុចកណ្តាលនៃធ្នូតូច AB ។ បន្ទាត់កាត់តាម O ហើយស្រប [AD] កាត់ [AC] ត្រង់ J ។ បង្ហាញថា J ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔCEF ។

៦៣. គេអោយប្រលេឡូក្រាម ABCD ដែលមានកំពូល A ជាមុំស្រួច ។ លើកន្លះបន្ទាត់ AB & CB តាងចំនុច H & K ដែល CH=CB & AK=AB ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. DH=DK

b. $\Delta DKH \cong \Delta ABK$ ។

៦៤. សង់ការេ BRSC & DCTU នៅលើជ្រុងពីរនៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ។ ស្រាយថា AC=ST ហើយបន្លាយនៃ (AC) កែងនឹង (ST) ។

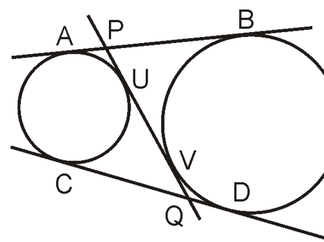
៦៥. គេអោយបន្ទាត់ (XY) និងរង្វង់ផ្ចិត O (បន្ទាត់មិនកាត់តាមរង្វង់ទេ) ។ ពីចំនុច A នៅលើ (XY) សង់បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ (AB) & (AC) ត្រង់ B & C ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា BC កាត់តាមចំនុចនឹងមួយកាលណា A រត់នៅលើ (XY) ។

៦៦. គេអោយ E; F; G ជាចំនុចនៅលើជ្រុង AB; AC; BC នៃ ΔABC ដែល AG; BF & CE កាត់គ្នាត្រង់ចំនុចមួយ ។ ស្រាយថា $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$ ។

៦៧. តាង P ជាចំនុចនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។ A_1; B_1; C_1 ជាជើងចំនោលកែងគូសពី P ទៅលើជ្រុង AB; BC; CA ។ ស្រាយថា A_1; B_1; C_1 រត់ត្រង់គ្នា ។

៦៨. គេអោយចតុកោណកែង ABCD; M ជាចំនុចកណ្តាល [AB]; N ជាចំនុចកណ្តាល [CD]; Q នៅលើ [AC] ។ បន្ទាត់ (QM) កាត់បន្ទាត់ (BC) ត្រង់ P ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Q\hat{N}M = M\hat{N}P$ ។

៦៩. ក្នុងរូបខាងស្តាំ បន្ទាត់ AB, CD & PQ ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមទៅនឹងរង្វង់ទាំងពីរដែល A & C នៅលើរង្វង់តែមួយ ហើយ B & D នៅលើរង្វង់មួយទៀត ។ ចំនុច P & D នៅលើ AB & CD ។ ស្រាយថា PB = QC ។



៧០. បណ្តាចំនុច P, Q, & R ត្រូវបានដៅនៅលើជ្រុង BC, AC , AB រៀងគ្នា នៃ ΔABC ដែល $BP=\frac{1}{3}BC,\ CQ=\frac{1}{3}CA,\ AR=\frac{1}{3}AB$ ។ បណ្តាចំនុច X, Y ត្រូវបានដៅនៅលើអង្កត់ PR & QP ដែល $PX=\frac{1}{3}PR$ & $QX=\frac{1}{3}PQ$ ។ស្រាយថា (XY)//(BC) ។

៧១. គេអោយ ΔABC មានកំពូលត្រង់ A ។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅΔABC, D ជាចំនុចកណ្តាលជ្រុង AB , E ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔACD ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $IE \perp CD$ ។

៧២. គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD, នៅលើបណ្តាអង្កត់ AB, BC , CD , DA គេដៅបណ្តាចំនុច M ,N , P , Q ដែល AQ = DP = CN = BM ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ MNPQ ជាការេនោះ ABCDក៏ជាការេដែរ ។

៧៣. គេអោយចតុកោណ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត(O), អង្កត់ទ្រូងទាំងពីរនៃចតុកោណកាត់គ្នាត្រង់M ។ ពីចំនុច P នៅលើជ្រុង AB គូសបន្ទាត់ PM , ពីចំនុច Q នៅលើជ្រុង BC គូសបន្ទាត់ QM ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $PM \perp CD$ នោះ $QM \perp AD$ ដែរ ។

៧៤. រង្វង់ (S) កាំ R ប៉ះនឹងបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា (t_1) & (t_2) ។ រង្វង់ (S_1) កាំ r_1 ប៉ះនឹងរង្វង់ (S) និងបន្ទាត់ (t_1) ។ រង្វង់ (S_2) កាំ r_2 ប៉ះនឹងរង្វង់ (S) និងបន្ទាត់ (t_2) ហើយរង្វង់ (S_1) & (S_2) ជារង្វង់ប៉ះគ្នាផងដែរ ។ គណនា R ជាអនុគមន៏នៃ r_1 & r_2 ។

៧៥. ABCD ជាចតុកោណប៉ោងដែល AB = 8 ; BC = 6 ; BD = 10 ; $\hat{A} = \hat{D}$ & $A\hat{B}D = \hat{C}$ ។ គណនា CD ។

៧៦. ក្នុង ΔABC ; $B\hat{A}C = 100^o \& AB = AC$ ។ D ជាចំនុចមួយនៅលើ [AC] ដែល $A\hat{B}D = C\hat{B}D$ ។ បង្ហាញថា AB + DB = BC ។

៧៧. ក្នុង ΔABC ដៅចំនុច P មួយ ។ នៅលើជ្រុង AC & BC ដៅចំនុច M & L ដែល $P\hat{A}C = P\hat{B}C \& P\hat{L}C = P\hat{M}C = 90^o$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ D ជាចំនុចកណ្តាល [AB] នោះ DM = DL ។

៧៨. ក្នុង ΔABC គេមាន $\hat{A} = 30^o; \hat{B} = 50^o; M \in (AC)$ ដែល $CM = CB$ ។ ស្រាយថា $BM=AC$ ។

៧៩. ក្នុងត្រីកោណសមបាត ABC ដែលមានមុំកំពូល $\hat{C} = 80^o$ ដៅចំនុច M ដែល $M\hat{B}A = 30^o; M\hat{A}B = 10^o$ ។ គណនា $A\hat{M}C$ ។

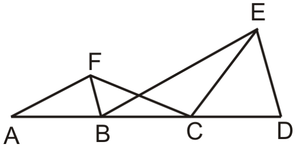
៨០. គេអោយចតុកោណញ្ញយ ABCD មានបាត AB=a; CD=b & ជ្រុងទ្រេត AD=c; BC=d & អង្កត់ទ្រូង AC=p; BD=q ។ ស្រាយថា $p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab$ ។

៨១. D ជាចំនុចមួយនៅលើជ្រុង [AB] នៃ ΔABC ដែល AB=4AD ។ P ជាចំនុចមួយនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ដែល $A\hat{D}P = A\hat{C}B$ ។ បង្ហាញថា PB=2PD ។

៨២. គេអោយ ΔABC សម័ង្សចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ P ជាចំនុចមួយនៅលើធ្នូ BC ។ ស្រាយថា $PA = PB + PC$ ។

៨៣. គេអោយការេ ABCD មួយ ។ ដៅចំនុច P ក្នុងការេដែល $P\hat{A}B = P\hat{B}A = 15^o$ ។ ស្រាយថា PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៨៤. ក្នុងរូបខាងស្តាំ ABCD ជាបន្ទាត់ត្រង់ដែល AB=BC=CD=2 & AF=DE=2; BE=4 & FC=CE ។ គណនា FB ។



៨៥. គេអោយរង្វង់ផ្ចិត (O) កាំ r ប៉ះរង្វង់ (O’) កាំ R ។ បន្ទាត់ (L) ប៉ះរង្វង់ទាំងពីរត្រង់ S & T ។ គណនា |ST| ។

៨៦. គេកំនត់ |PQR| ជាក្រលាផ្ទៃនៃ PQR ។ បណ្តាអង្កត់ទ្រូងនៃ ABCD កាត់គ្នាត្រង់E ។ ឧបមាថា |AEB|=3; |DEC|=10; |BEC|=2|AED| ។ គណនា |AED| ។

៨៧. គេអោយ ΔABC ដូចរូបខាងក្រោម ។ដោយ (SR)//(CB);(TU)//(AC);(PQ)//(BC) ចូររកក្រលាផ្ទៃ ΔABC ដោយដឹងថាបន្ទាត់ (PQ); (TU); (SR) ចែក ΔABC ជាពីរចំនែកមានក្រលាផ្ទៃស្មើរគ្នា ហើយ $S_{XYZ}=1$ ។

៨៨. គេអោយ ABCD ជាចតុកោណប៉ោងមាន K; L; M; N ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ DC; DA; AB; BC ។ ឧបមាថា AK កាត់ BL; DN ត្រង់ P; S ហើយ CM កាត់ BL; DN ត្រង់ Q; R ។ គណនាក្រលាផ្ទៃនៃចទុកោណ PQRS ដោយដឹងថា $S_{ABCD}=3000$; $S_{AMQP}=513$ និង $S_{CKSR}=388$ ។

៨៩. គេអោយចតុកោណ ABCD មាន AD= $\sqrt{3}$; $\hat{ABD} = \hat{ACD} = 60^o$; E & F ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD & ACD; បើ $EF = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ ។ គណនា BC ។

៩០. នៅលើជ្រុងកែង [AC] & [BC] នៃ ΔABC សង់ខាងក្រៅនូវការេ ACKL & BCMN ។ (BL) កាត់ (AC) & (AN) រៀងគ្នាត្រង់ P & R ។ (AN) កាត់ (BC) ត្រង់ Q ។ ស្រាយថា $S_{CPRQ} = S_{ABR}$ ។

៩១. បន្ទាត់ (L) កាត់ជ្រុង [AB] & [AD] នៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ត្រង់ E & F រៀងគ្នា ។ ឧបមាថា G ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (L) & (AC) ។ ស្រាយថា $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF}$ ។

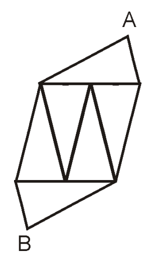
៩២. គេអោយរង្វង់ (O_1; R_1); (O_2; R_2) ប៉ះគ្នា ហើយរង្វង់ (O_3; R_3) ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ O_1; O_2 រួចប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះក្រៅរវាង O_1 & O_2 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$ ។

៩៣. ក្នុងបញ្ចកោណ ABCD មានរង្វាស់ជ្រុង 1; 2; 3; 4 & 5 ដោយមិនគិតពីលំដាប់ ។ គេយក F; G; H; I ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AB; BC; CD; DE ។ X ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [FH] & Y ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [GI] ។ អង្កត់ [XY] មានតំលៃប្រវែងជាចំនួនគត់ ។ គណនាតំលៃដែលអាចមានរបស់ AE ។

៩៤. នៅលើជ្រុង BC នៃ ΔABC ដៅចំនុច P ដែល PC = 2BP ។ គណនា $A\hat{C}B$ បើ $A\hat{B}C = 45^o; A\hat{P}C = 60^o$ ។

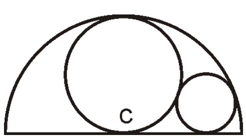
៩៥. បណ្តាអង្កត់ទ្រូង AC & CE នៃឆកោណនិយ័ត ABCDEF ត្រូវចែកដោយចំនុច M & N ដែល $AM : AC = CN : CE = \lambda$ ។ គណនា λ បើ B, M, N រត់ត្រង់គ្នា ។

៩៦. រូបខាងស្តាំកើតឡើងពីត្រីកោណសមបាតប៉ុនគ្នាចំនួន 6 ដែលត្រូវបាន តំរៀបដោយមិនអោយជាន់គ្នា ។ ត្រីកោណនីមួយៗមានបាតប្រវែង 1ឯកតា និង ជ្រុងប្រវែង ២ឯកតា ។ គណនាប្រវែង AB ។



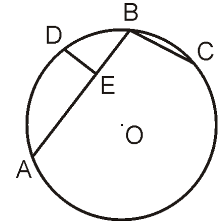
៩៧. នៅផ្នែកខាងក្នុងចតុកោណ ABCD ដៅ M ដែល ABMD ជាប្រលេឡូក្រាម ។ ស្រាយថា បើ $C\hat{D}M = C\hat{B}M$ នោះ $A\hat{C}D = B\hat{C}M$ ។

៩៨. ក្នុងរូបខាងស្តាំ រង្វង់ពីរប៉ះគ្នា ហើយចារឹកក្នុងកន្លះរង្វង់ដែល មានកាំ 2cm ។ បើរង្វង់ធំប៉ះអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់ត្រង់ផ្ចិត C របស់វា គណនាកាំនៃរង្វង់តូច ។



៩៩. ក្នុងរូបខាងស្ដាំ D ជាចំនុចកណ្ដាលធ្នូ AC និង $DE \perp AB$ ។

ស្រាយថា $AE = EB + BC$ ។



១00. ΔABC កែងត្រង់ A មានប្រវែងបណ្ដាជ្រុង $BC=a$, $AB=c$, $CA=b$ ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ ផ្ចិត BC ។ចំនុច P មួយនៅលើរង្វង់ដែល Pនិង A នៅសងខាង BC ។តាម P គូស $PK \perp BC$ ត្រង់ K , $PL \perp AC$ ត្រង់ L និង $PM \perp AB$ ត្រង់ M ។តាងប្រវែងបណ្ដាអង្កត់ PK, PL និង PM ជាលំដាប់រៀងគ្នា x ,y ,z ។

រកតំលៃអប្បបរមានៃផលបូក : $S = \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ ។

១0១. គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ។ គេដឹងថាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃបណ្ដាមុំ BAD និង ABC កាត់គ្នាត្រង់ចំនុច E នៅលើជ្រុង CD ។

ក) បង្ហាញថា : $AD + BC = CD$ ។

ខ) គេដឹងថា $\frac{CD}{CB} = k > 1$ ។ គណនា $\frac{S_{ADE}}{S_{BCE}}$ ។

១0២. គេអោយ ΔABC មានជ្រុង a; b; c & កំពស់ h_a; h_b; h_c ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-oc)}}$$

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

១0៣. គេអោយ ΔABC មាន $0 < B < 90^o$ ។ តាង AH; AD; AM ជាកំពស់ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ និងជាមេដ្យានគូសចេញពី A ។ ស្រាយថា D នៅចន្លោះ M & H ។

១០៤. ក្នុង ΔABC គូសកំពស់ AD, BE & CF ។ ស្រាយថា $\frac{P'}{P}=\frac{r}{R}$ ដែល P' ជាបរិមាត្រ ΔEDF & P ជាបរិមាត្រ ΔABC ។

១០៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើត្រីកោណ ABC មានជ្រុងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$2(a^3+b^3+c^3)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

១០៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $m_a+m_b+m_c=\frac{9R}{2}$ នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

១០៧. ស្រាយថាគ្រប់ ΔABC គេបាន:

$$(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0 \text{ ។}$$

១០៨. កំនត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

a. $S=\frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$

b. $S=\frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$

១០៩. ពីផ្ចិត O នៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC គូសបន្ទាត់កែង OA', OB' & OC' ទៅលើជ្រុង BC, CA & AB រៀងគ្នា(មុំ ΔABC ជាមុំស្រួច) ។ ស្រាយថា

$$OA'+OB'+OC'=R+r$$

១១០. P ជាចំនុចក្នុង ΔABC ។ PA កាត់ BC ត្រង់ D; PB កាត់ AC ត្រង់ E & PC កាត់ AB ត្រង់ F ។ បង្ហាញថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $\frac{AP}{PD};\frac{BP}{PE};\frac{CP}{PF}$ មានតំលៃមិនលើសពី 2 និងយ៉ាងហោចណាស់មានមួយមានតំលៃធំជាង 2 ។

១១១. ក្នុងរង្វង់មួយដៅអង្កត់ធ្នូ AB និង ចំនុច C ដៅលើរង្វង់ដែល ចំងាយពី C ទៅ AB ស្មើ 4cm ។ បើ CA=6cm & CB=10cm គណនាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ។

១១២. គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD ដែលអង្កត់ទ្រូង AC & BD កាត់គ្នាត្រង់ O ។ ឧបមាថា r_1, r_2, r_3, r_4 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ OAB, OBD, OCD & ODA រៀងគ្នា ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់ ។

១១៣. ក្នុង ΔABC គេអោយ D, E, F ជាចំនុចកណ្ដាលនៃជ្រុង BC, CA, AB និង P, Q, R ជា ចំនុចកណ្ដាលនៃមេដ្យាន AD, BE, CF រៀងគ្នា ។ ស្រាយថាតំលៃផលធៀប T ខាងក្រោម មិនអាស្រ័យនឹងរូបរាងរបស់ត្រីកោណ ហើយរកតំលៃនោះ ។

$$T=\frac{AQ^2+AR^2+BP^2+BR^2+CP^2+CQ^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$$

១១៤. ក្នុង ΔPQR មាន PQ=8, QR=13 & PR=15 ។ បង្ហាញថាមានចំនុច S មួយនៅលើ PR (តែមិននៅចំនុចចុងនៃអង្កត់ទេ) ដែល PS & QS មានតំលៃគត់ ។

១១៥. គេអោយបញ្ចកោណនិយ័ត ABCDE ចារឹកក្នុងរង្វង់ (O) ។ នៅលើធ្នូ AB នៃ (O) ដៅចំនុច M (M មិនស្ថិតលើ A រឺ B ឡើយ) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$MA + MB + MD = MC + ME$$

១១៦. គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ សង់ត្រីកាណ ABR, BCP, CAQ ដែលស្ថិតនៅជាប់ខាងក្រៅ ΔABC ហើយមាន $P\hat{B}C = C\hat{A}Q = 45^o$, $B\hat{C}P = Q\hat{C}A = 30^o$ និង $A\hat{B}R = B\hat{A}R = 15^o$ ។ ស្រាយថា $Q\hat{R}P = 90^o$ & $QR = RP$ ។

១១៧. គេអោយ a, b, c ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង A ជាក្រលាផ្ទៃ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$ ។ តើសមភាពកើតឡើងពេលណា ?

១១៨. កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណសមបាតមួយមានប្រវែង R និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះគឺ r ។ បង្ហាញថាចំងាយរវាងផ្ចិតនៃរង្វង់ទាំងពីរគឺ $\sqrt{R(R-2r)}$ ។

១១៩. ត្រីកោណ ABC មានប្រវែងជ្រុង a, b, c ។ បន្ទាត់បីដែលប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រូវបានគូសស្របទៅនឹងជ្រុងទាំងបី ។ បន្ទាត់ប៉ះនីមួយៗផ្គុំជាមួយជ្រុងពីរៗនៃត្រីកោណបង្កើតបានជាត្រីកោណដែលមានចំនួនសរុប3 ។ គណនាផលបូកសរុបរវាងក្រលាផ្ទៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទាំង3 និង រង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ។

ជំពូក ៣	ដំណោះស្រាយ

០១. បង្ហាញថា $S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$

តាមទ្រឹស្តីបទ sin ៖ $a=2R\sin A,\ b=2R\sin B$ គេបាន៖

$$S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)=R^2(\sin^2 A\sin 2B+\sin^2 B\sin 2A)$$

$$=2R^2\sin A\sin B(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=2R^2\sin A\sin B\sin(A+B)$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin(180^\circ-C)=2R^2\sin A\sin B\sin C$$ ពិត

ដូចនេះ $S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$ ។

០២. ស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$

យើងមាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $\cot B=\frac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc}$, $\cot C=\frac{R(b^2+a^2-c^2)}{abc}$

ដូចនេះគេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$ ។

០៣. ស្រាយថា $\cot\alpha=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}$

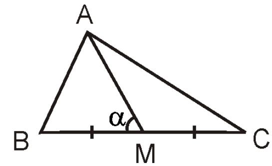
តាមទ្រឹស្តីបទ sin យើងបាន ៖

$$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{BM}{\sin B\hat{A}M}=\frac{a}{2\sin(B+\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{a}{2c}=\frac{\sin A}{2\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{2\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos\alpha+\sin\alpha\cos B}{\sin\alpha}=\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{2\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \sin B.\cot\alpha=\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{2\sin c}-\cos B$$



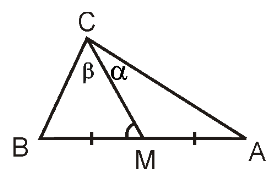
$$\Rightarrow \sin B\cot\alpha=\frac{\sin(B-C)}{2\sin C}$$

ដូចនេះ $\underline{\cot\alpha=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}}$ ។

០៤. a. *ស្រាយថា* $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

តាមទ្រឹស្តីបទ sin ក្នុង ΔACM & ΔBCM យើងបាន:

$$\frac{AM}{\sin\alpha}=\frac{CM}{\sin A}\ (1),\quad \frac{BM}{\sin\beta}=\frac{CM}{\sin B}\ (2)$$



ដោយ AM = BM

តាម (1) & (2) គេបាន $\underline{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin A}{\sin B}}$

b. *គណនាមុំ A, B, C ជាអនុគមន៍* α, β

បើ $\alpha=\beta$ នោះ $A=B=\frac{\pi}{2}-\alpha \;\&\; C=2\alpha$

បើ $\alpha\neq\beta$, ឧបមាថា $\alpha>\beta$ នោះ $\sin\alpha>\sin\beta$

តាម (a) : $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin A}{\sin B}\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin A-\sin B}=\frac{\sin\alpha+\sin b}{\sin A+\sin B}$

$$\Rightarrow \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2} = \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ដោយ $\alpha+\beta = C$ នោះ $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \cot\frac{A+B}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

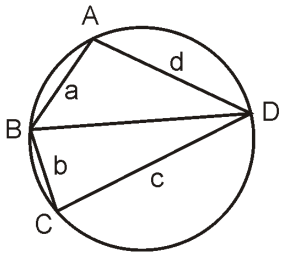
$$\Rightarrow \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A-B}{2} = \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

តាង $\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ នោះ $\tan\frac{A-B}{2} = \tan\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A-B}{2} = \frac{\varphi}{2} \\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\varphi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\varphi}{2} \end{cases}$$ ។

០៥. ស្រាយថា: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$



យើងមាន $\tan^2\frac{A}{2} = \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$

ដោយ $\hat{A} + \hat{C} = 180^o \Rightarrow \cos A = -\cos C$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុង ΔABD & ΔCBD:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}$$

$$\bullet 1 - \cos A = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{2ad - a^2 - d^2 + 2bc + b^2 + c^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{(b+c+d-a)(b+c+a-d)}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{2(p-a)(p-d)}{ad+bc}$$

$$\bullet 1 + \cos A = 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{2(p-b)(p-c)}{ad+bc}$$

គេបាន $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\mathrm{co}A} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}$

ដូចនេះ $\underline{\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}}$ ។

០៦. ស្រាយថា $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

យើងមាន $r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)} = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$\Rightarrow a = r(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2})$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $b = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$

$$c = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\bullet (a-b) = r\left(\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\bullet (b-c) = r\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$\bullet (c-a) = r\left(\cot\frac{A}{2} - \cot\frac{C}{2}\right)$$

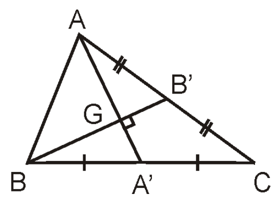
គេបាន $\underline{(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0}$ ។

០៧. ស្រាយថា $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$

យក G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔABC

គេបាន $AG^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{4m_a^2}{9}$

$$= \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$



ដូចគ្នាដែរ គេបាន $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

ដោយ $AA' \perp BB' \Rightarrow AB^2 = AG^2 + BG^2$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + 4c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab\cos C = 4c^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទ sin គេបាន $a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$

$\Rightarrow 2.2R\sin A.2R\sin B.\cos C = 4(2R\sin C)^2$

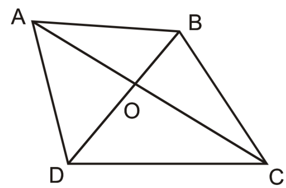
$\Leftrightarrow \sin A\sin B\cos C = 2\sin^2 C \quad (1)$

យើងពិនិត្យ $\cot C = 2(\cot A + \cot B) \Leftrightarrow \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{2\sin(A+B)}{\sin A\cos B}$

$\Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C = 2\sin^2 C$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន $\underline{\cot C = 2(\cot A + \cot B)}$ ។

០៨. ស្រាយថា $AB + DC < AC + BD$



តាង O ជាអង្កត់ទ្រូងចតុកោណ ABCD

យើងមាន AC=OA+OC

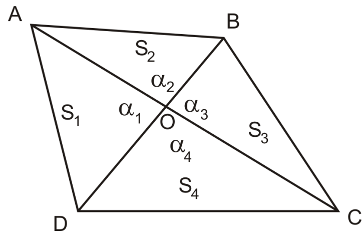
BD=OB+OD

$\Rightarrow$ AC + BD = (OA+OB)+(OC+OD)

> AB + DC

ដូចនេះ $\underline{AB + DC < AC + BD}$ ។

០៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \geq 2S$



យើងមាន $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$2S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4$

$= \frac{1}{2}.2OA.OD\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}.2\ OA.OB\sin\alpha_2$

$+ \frac{1}{2}.2\ OB.OC\ \sin\alpha_3 + \frac{1}{2}.2\ OC.OD\ \sin\alpha_4$

$= OA.OD\sin\alpha_1 + OA.OB\sin\alpha_2 + OB.OC\ \sin\alpha_3 + OC.OD\ \sin\alpha_4$

ដោយ $\sin\alpha_1 \leq 1$; $\sin\alpha_2 \leq 1$; $\sin\alpha_3 \leq 1$; $\sin\alpha_4 \leq 1$

$\Rightarrow OA.OD\sin\alpha_1 + OA.OB\sin\alpha_2 + OB.OC\sin\alpha_3 + OC.OD\ \sin\alpha_4$

$\leq OA.OD + OA.OB + OB.OC + OC.OD$

$\leq \frac{OA^2 + OD^2 + OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OD^2}{2}$

$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

ដូចនេះ $\underline{2S \leq OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2}$

សមភាពកើតឡើងកាលណា OA=OB=OC=OD; $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=90^o$ គឺ ABCD ជាការេ ។

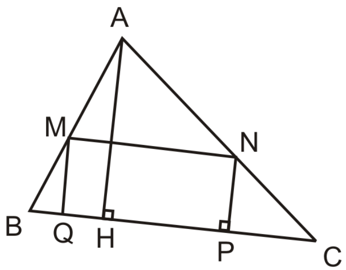
១០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b \geq \sqrt{2}$

យើងមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A \leq \frac{1}{2}bc$ $(\sin A \leq 1)$

ដោយ $b \geq c \Rightarrow \frac{1}{2}bc \leq \frac{1}{2}b^2$

$\Rightarrow S \leq \frac{1}{2}b^2$ ដូចនេះ $\underline{b \geq \sqrt{2}}$ ។

១១. ស្រាយថា $S \geq 2S'$



តាង H ជាកំពស់ ΔABC គូសចេញពីនំពូល A ។

យើងមាន $S=\frac{1}{2}\cdot AH\cdot BC;\ S'=MN\cdot NP$

ដោយ $(MN)\ //\ (BC) \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ (1)

$(PN)\ //\ (AH) \Rightarrow \frac{CN}{CA}=\frac{PN}{AH}$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន $\frac{MN\cdot PN}{BC\cdot AH}=\frac{AN\cdot CN}{AC^2}$

$\Leftrightarrow \frac{S'}{2S}=\frac{AN\cdot CN}{AC^2}$

តាម Cauchy: $AN^2+CN^2 \geq 2\cdot AN\cdot CN \Rightarrow (AN+CN)^2 \geq 4AN\cdot CN$

$$\Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} \geq AN\cdot CN$$

គេបាន $\frac{S'}{2S} \leq \frac{AC^2}{4AC^2} \Rightarrow \underline{S \geq 2S'}$ ។

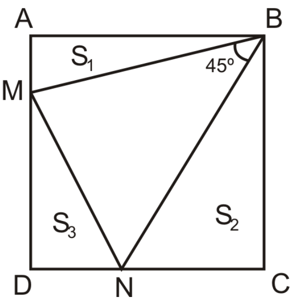
១២. <u>*ស្រាយថា*</u> $\sqrt{2}$ -1 $\le S_{MBN} \le \frac{1}{2}$

យើងមាន $S_{MBN} = \frac{1}{2}\cdot BM\cdot BN\sin 45^{o} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot BM\cdot BN$

តាង $S = S_{MBN} = S_{ABC} - (S_1 + S_2 + S_3)$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\cdot AM\cdot AB+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot NC+\frac{1}{2}\cdot DM\cdot DN\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}(AM+NC+DM\cdot DN)$$



$$=1-\frac{1}{2}\cdot\left[AM+NC+(1-AM).DN\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[AM-AM\cdot DN+NC+DN\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[AM(1-DN)+CD\right]$$

$$S=1-\frac{1}{2}\left[AM.CN+1\right]\Rightarrow AM.CN=1-2S$$

ម្យ៉ាងទៀត $S=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot BM\cdot BN=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(1+AM^2)(1+CN^2)}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{AM^2\cdot CN^2+AM^2+CN^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\ S^2=\frac{1}{8}\left[(1-2S^2)+BM^2-1+BN^2-1+1\right]$$

$$\Leftrightarrow\ 8S^2=1-4S+4S^2+BM^2+BN^2-1$$

$$\Leftrightarrow\ 4S^2+4S=BM^2+BN^2\ge 2BM.BN=\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot BM\cdot BN=\frac{8}{\sqrt{2}}S$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{2}S^2+\sqrt{2}S-2S\ge 0$$

$\Leftrightarrow\ S(\sqrt{2}S+\sqrt{2}-2)\ge 0$ ដោយ $S>0$

$$\Rightarrow\ S+1-\sqrt{2}\ge 0\Leftrightarrow S\ge\sqrt{2}-1$$

ហើយ $S = 1 - \frac{1}{2}(AM.CN + 1)$

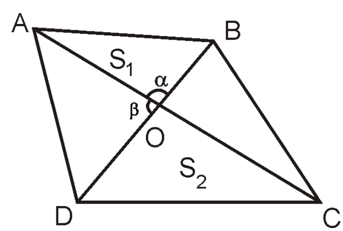
បើ M ត្រួតលើ A រឺ D $\Rightarrow AM.CN = 0 \Leftrightarrow S = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

បើ M មិនត្រួតលើ A រឺ D $\Rightarrow AM.CN > 0 \Leftrightarrow S < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S \le \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\sqrt{2} - 1 \le S_{MBN} \le \frac{1}{2}$ ។

១៣. *ស្រាយថា* $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \le \sqrt{S}$



យើងមាន $S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \sin\alpha$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OC \sin\alpha$

$S_1.S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \sin\alpha \times \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OC \sin\alpha$

តែ $\alpha + \beta = 180^o \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

គេបាន $S_1.S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \sin\beta \times \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OC \sin\beta$

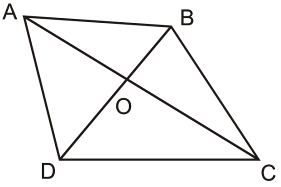
នាំអោយ $S_1.S_2 = S_{OAD}.S_{OBC}$

ម្យ៉ាងទៀត $S = S_1 + S_2 + S_{OAD} + S_{OBC} \ge S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_{OAD} \cdot S_{OBC}}$

$\Leftrightarrow S \ge S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$

ដូចនេះ $\sqrt{S} \ge \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ ។

១៤. ស្រាយថា $S \le \frac{1}{8}(AC+BD)^2$



យើងមាន $S = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{ODC} + S_{OAD}$

តែ $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin A\hat{O}B \le \frac{1}{2}(OA.OB)$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ គេបាន $S_{OBC} \le \frac{1}{2}(OB.OC)$

$$S_{OCD} \le \frac{1}{2}(OD.OC)$$

$$S_{OAD} \le \frac{1}{2}(OA.OD)$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{2}(OB.OA + OB.OC + OC.OD + OD.OA)$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{1}{2}\left[OB(AO+OC) + OD(OA+OC)\right]$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{1}{2} AC.DB$$

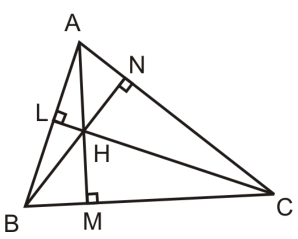
តាម Cauchy $\Rightarrow AC^2 + DB^2 \ge 2AC.DB$

$$\Leftrightarrow \frac{(AC+DB)^2}{4} \ge AC.DB$$

នោះ $S \le \frac{1}{8}(AC+DB)^2$ ។

១៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $\frac{HM}{AM} + \frac{HN}{BN} + \frac{HL}{CL} = 1$



យើងមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2} AM.BC$

$$S_{HBC} = \frac{1}{2} HM.BC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{HM}{AM}$$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HN}{BN}$; $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HL}{CL}$

នោះ $\frac{HM}{AM} + \frac{HN}{BN} + \frac{HL}{CL} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

b. $\frac{AM}{HM} + \frac{BN}{HN} + \frac{CL}{HL} \geq 9$

តាមសំរាយខាងលើ $\Rightarrow \frac{AM}{HM} + \frac{BN}{HN} + \frac{CL}{HL} = S_{ABC}\left(\frac{1}{S_{HBC}} + \frac{1}{S_{HAC}} + \frac{1}{S_{AHB}}\right)$

$$= (S_{HBC} + S_{HAC} + S_{AHB})\left(\frac{1}{S_{HBC}} + \frac{1}{S_{HAC}} + \frac{1}{S_{AHB}}\right)$$

តាម Cauchy: $S_{HBC} + S_{HAC} + S_{AHB} \geq 3\sqrt[3]{S_{HBC} \cdot S_{HAC} \cdot S_{AHB}}$

$$\frac{1}{S_{HBC}} + \frac{1}{S_{HAC}} + \frac{1}{S_{AHB}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{S_{HBC} \cdot S_{HAC} \cdot S_{AHB}}}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{HM} + \frac{BN}{HN} + \frac{CL}{HL} \geq 9$$

c. $AM.HM \leq \frac{BC^2}{4}$

ΔABM & ΔHMC ជាត្រីកោណកែង $B\hat{A}M = L\hat{C}B$ (មុំជ្រុងកែងរៀងគ្នា)

$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta HMC$ នោះ $\frac{AM}{BM} = \frac{MC}{HM} \Leftrightarrow AM.HM = BM.MC$

តាម Cauchy: $BM^2 + MC^2 \geq 2BM.MC$

$\Leftrightarrow \frac{(BM + MC)^2}{4} \geq BM.MC$ តែ BM+MC=BC

ដូចនេះ $AM.HM \le \frac{BC^2}{4}$ ។

១៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

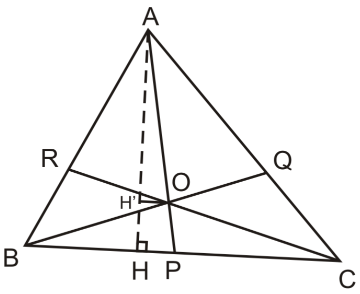
a. $\frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = 1$

តាង [AH] ជាកំពស់ ΔABC

H´ ជាចំនោលកែងពី $O \to AH$

$\Rightarrow$ [HH´] ជាកំពស់ ΔOBC

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH.BC \\ S_{OBC} &= \frac{1}{2} HH'.BC \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{HH'}{AH}$$



ដោយ (OH´) // (BC) $\Rightarrow \frac{HH'}{AH} = \frac{OP}{AP}$

$\Rightarrow \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{OP}{AP}$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} = \frac{OQ}{BQ}$; $\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{OR}{CR}$

គេបាន $\frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1$

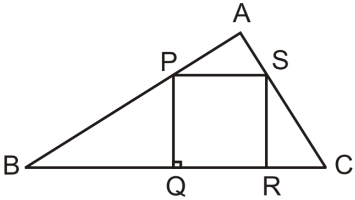
b. $\frac{AP}{OP} + \frac{BQ}{OQ} + \frac{CR}{OR} \ge 9$

$$\frac{AP}{OP} + \frac{BQ}{OQ} + \frac{CR}{OR} = S_{ABC}\left(\frac{1}{S_{OBC}} + \frac{1}{S_{OAC}} + \frac{1}{S_{OAB}}\right)$$

$$= \left(S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}\right)\left(\frac{1}{S_{OBC}} + \frac{1}{S_{OAC}} + \frac{1}{S_{OAB}}\right) \ge 9$$

១៧. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BC \ge 3QR$*

យើងមានៈ



$B\hat{P}Q = S\hat{C}B$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា)

$\Rightarrow \Delta PBQ$ & ΔSCR ជាត្រីកោណកែងមានៈ

$B\hat{P}Q = S\hat{C}B$ នោះ $\Delta PBQ \sim \Delta SCR$

វិបាក $\dfrac{BQ}{SR} = \dfrac{PQ}{RC} \Leftrightarrow SR.PD = BQ.RC \ \ (1)$

តែ $PQ = SR = QR \Rightarrow QR^2 = BQ.RC$

$BC = BQ + RC + QR \ge 2\sqrt{BQ.RC} + QR = 3QR$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $BQ = RC$

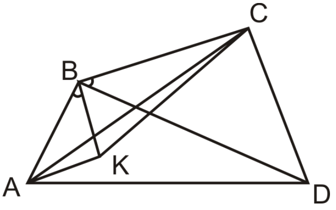
តាម $(1) \Rightarrow BQ^2 = QR^2 \Rightarrow BQ = QP$ នោះ $A\hat{B}C = 45^o$

ដូចនេះ $BC \ge 3QR$ សមភាពកើតឡើងកាលណា ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

១៨. *ស្រាយថា $AB.CD + AD.BC \ge AC.BD$*

តាង K ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណដែល

$A\hat{B}K = D\hat{B}C; B\hat{A}K = B\hat{D}C$



គេបាន $\Delta AKB \sim \Delta BCD$

វិបាក $\dfrac{AK}{DC} = \dfrac{BK}{CB} = \dfrac{AB}{BD}$

នោះ $AB.DC = BD.AK \ \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $A\hat{B}D = A\hat{B}K + K\hat{B}D; K\hat{B}C = K\hat{B}D + D\hat{B}C$

នោះ $A\hat{B}D = K\hat{B}C$ តែ $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BK}{CB} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BKC$

វិបាក $\frac{AB}{BK}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{CK} \Rightarrow BC.AD=BD.CK$ (2)

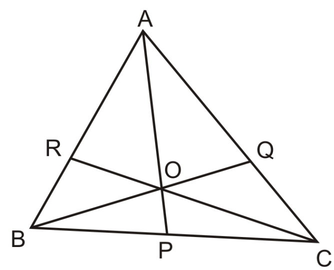
យក (1)+(2)⇒

$AB.DC+BC.AD=BD(AK+CK)\geq BD.AC$ (AK+KC≥AC)

ដូចនេះ <u>AB.CD+AD.BC ≥ AC.BD</u>

សមភាពកើតឡើងកាលណា K លើ (AC) ។

១៩. <u>ស្រាយថា</u> $\sqrt{\frac{OA}{OP}}+\sqrt{\frac{OB}{OQ}}+\sqrt{\frac{OC}{OR}}\geq 3\sqrt{2}$



តាង $S_{OBC}=S_1; S_{OCA}=S_2; S_{OAB}=S_3; S_{ABC}=S$

$\Rightarrow S=S_1+S_2+S_3$

យើងមាន $\frac{S}{S_1}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}=1+\frac{S_2+S_3}{S_1}$ (1)

តែ $\frac{S}{S_1}=\frac{AP}{OP}=\frac{OA+OP}{OP}=1+\frac{OA}{OP}$ (2)

(1) & (2) គេបាន $\frac{OA}{OP}=\frac{S_2+S_3}{S_1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{OA}{OP}}=\frac{\sqrt{S_2+S_3}}{\sqrt{S_1}}$

ធ្វើដូចគ្នាដែរគេបាន $\sqrt{\frac{OB}{OQ}}=\frac{\sqrt{S_1+S_3}}{\sqrt{S_2}}$; $\sqrt{\frac{OC}{OR}}=\frac{\sqrt{S_1+S_2}}{\sqrt{S_3}}$

តាម Cauchy: $S_2+S_3\geq 2\sqrt{S_2S_3} \Rightarrow 2(S_2+S_3)\geq\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S_2+S_3}\geq\frac{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{2}}$$

នាំអោយ $\sqrt{\frac{OA}{OP}}\geq\frac{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{2}.\sqrt{S_1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}+\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_1}}\right)$

$$\sqrt{\frac{OA}{OP}}+\sqrt{\frac{OB}{OQ}}+\sqrt{\frac{OC}{OR}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}+\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_1}}+\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}+\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_3}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_3}}\right]\geq\frac{6}{\sqrt{2}}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{OA}{OP}}+\sqrt{\frac{OB}{OQ}}+\sqrt{\frac{OC}{OR}}\geq 3\sqrt{2}$ ។

២០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\delta}\geq\frac{3}{2}$

តាម Cauchy: $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\delta}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{\alpha\beta\delta}}$

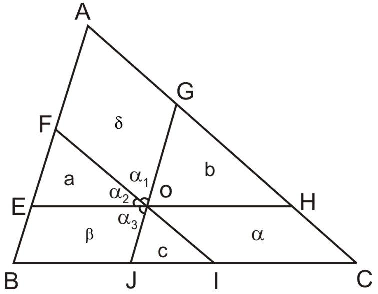
ដោយ $a=\frac{1}{2}OE.OF\sin\alpha_2$

$b=\frac{1}{2}OG.OH\sin\alpha_3$

$c=\frac{1}{2}OJ.OI\sin\alpha_1$

$\Rightarrow abc=\frac{1}{8}OE.OF.OG.OH.OI.OJ$

$\times\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$



ម្យ៉ាងទៀត $\alpha=OH.OI\sin\alpha_2$

$\beta=OJ.OE\sin\alpha_3$

$\delta=OF.OG\sin\alpha_1$

$\Rightarrow\alpha\beta\delta=OE.OF.OG.OH.OI.OJ.\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$

នាំអោយ $\frac{abc}{\alpha\beta\delta}=\frac{1}{8}$ នោះ $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\delta}\geq\frac{3}{2}$ ។

២១. សំរាយវិសមភាព

1.យើងមាន : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$

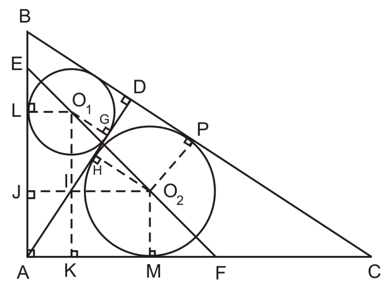
បើ $A < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow$ $\underline{BC^2 < AB^2 + AC^2}$

ម្យ៉ាងទៀត : $4AM^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2 > 2BC^2 - BC^2$

$$\Rightarrow 4AM^2 > BC^2 \Rightarrow \underline{2AM > BC}$$

2. ស្រាយដូចសំនួរទី (1) ដែរ ។

២២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2S_{AEF} \le S_{ABC}$



តាងរង្វង់ O_1 មានកាំ R_1

រង្វង់ O_2 មានកាំ R_2 និង $AD = h$

យើងមាន : $IO_2 = JO_2 - IJ$

តែ $JO_2 = AM = AH = AD - HD$

$= AD - O_2P = h - R_2$

$IJ = O_1L = R_1$

នោះ $IO_2 = h - R_1 - R_2$

ធ្វើដូចគ្នាដែរចំពោះ $IO_1 = h - R_1 - R_2$

ដូចនេះ $IO_1 = IO_2$ ។

$\Delta \perp IO_1O_2$ មាន $IO_1 = IO_2$ នោះ ΔIO_1O_2 ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

តែ $O_1\hat{O}_2I = O_2\hat{F}A = 45^o$ ហើយ $F\hat{M}O_2 = 90^o$

នាំអោយ ΔMO_2F ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

វិបាក $O_2M = MF = R_2$

$AF = AM + MF = AH + MF = h - R_2 + R_2 = h$

Δ AEF ជាត្រីកោណកែងមាន $A\hat{F}E = 45^{o} \Rightarrow AE = AF = h$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}h^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}h.BC$

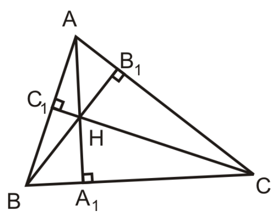
$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{h}{BC} = \frac{BC.h}{BC^2} = \frac{AB.AC}{AB^2 + AC^2} \le \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\underline{2S_{AEF} \le S_{ABC}}$ ។

២៣. *ស្រាយថា* $(AH+BH+CH)^2 \le a^2 + b^2 + c^2$

ដោយ $\angle BAA_1$ ជាមុំរួមរវាង $\Delta\perp AHC_1$ & $\Delta\perp AA_1B$

$\Rightarrow \Delta AHC_1 \sim \Delta AA_1B$



វិបាក $\frac{AC_1}{AA_1} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH.AA_1 = AC_1.AB$

ក្នុង $\Delta AC_1C: \cos A = \frac{AC_1}{AC} \Rightarrow AC_1 = \cos A.AC$

នោះ $AH.AA_1 = AB.AC\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow CH.CC_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$; $BH.BB_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$

នាំអោយ $AH.AA_1 + BH.BB_1 + CH.CC_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត តាមលំហាត់លេខ ១៥.a : $\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{AA_1 - AH}{AA_1} + \frac{BB_1 - BH}{BB_1} + \frac{CC_1 - CH}{CC_1} = 1 \Rightarrow \frac{AH}{AA_1} + \frac{BH}{BB_1} + \frac{CH}{CC_1} = 2$

តាមវិសមភាព Buniakovsky :

$$\left(\frac{\sqrt{AH}}{\sqrt{AA_1}}\sqrt{AH}.\sqrt{AA_1}+\frac{\sqrt{BH}}{\sqrt{BB_1}}\sqrt{BH}\sqrt{BB_1}+\frac{\sqrt{CH}}{\sqrt{CC_1}}\sqrt{CH}.\sqrt{CC_1}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{AH}{AA_1}+\frac{BH}{BB_1}+\frac{CH}{CC_1}\right)(AH.AA_1+BH.BB_1+CH.CC_1)$$

$$\Leftrightarrow\ (AH+BH+CH)^2\le 2\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ (AH+BH+CH)^2\le a^2+b^2+c^2$$

ដូចនេះ $\underline{(AH+BH+CH)^2\le a^2+b^2+c^2}$ ។

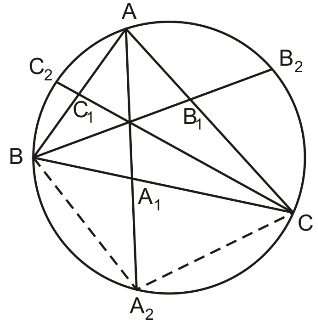
២៤. *ស្រាយថា* $S=\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{AB_2+B_2C}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\ge\frac{3}{4}$

យើងមាន : $[AA_2)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A $\Rightarrow A_2B=A_2C$

តែ $AA_2.BC=AB.A_2C+BA_2.AC$

នាំអោយ $AA_2.BC=A_2C(AB+AC)$

$$\Leftrightarrow\ \frac{BC}{AB+AC}=\frac{A_2C}{AA_2}$$



ΔACA_2 និង ΔA_1A_2C មាន :

$A_1\hat{C}A_2=B\hat{A}A_2=A_2\hat{A}C$

$\angle A_2$ ជាមុំរួម

នាំអោយ $\Delta ACA_2\sim\Delta A_1A_2C$

វិបាក $\frac{A_1A_2}{A_2C}=\frac{A_2C}{AA_2}$

នោះ $\frac{A_1A_2}{A_2C}=\frac{BC}{AB+AC}\ \Leftrightarrow\ \frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}=\frac{BC}{2(AB+AC)}$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow \dfrac{B_1B_2}{AB_2+B_2C}=\dfrac{AC}{2(AB+BC)}$; $\dfrac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}=\dfrac{AB}{2(AC+BC)}$

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{BC}{AB+AC}+\frac{AC}{AB+BC}+\frac{AB}{AC+BC}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(AB+BC+AC)\left(\frac{1}{AB+AC}+\frac{1}{AB+BC}+\frac{1}{AC+BC}\right)-3\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[(AB+AC+AB+BC+AC+BC)\left(\frac{1}{AB+AC}+\frac{1}{AB+AC}+\frac{1}{AC+BC}\right)-6\right]$$

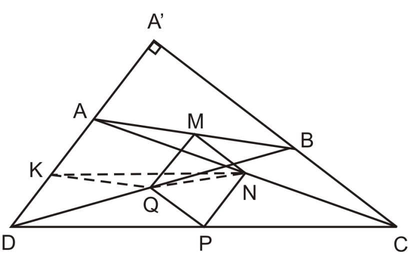
$$\geq\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\dfrac{B_1B_2}{AB_2+B_2C}+\dfrac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\geq\dfrac{3}{4}$ ។

២៥. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា* $S_{MNPQ}\geq\dfrac{(a-c)^2}{8}$

តាង A' ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្លាយ(DA)&(BC)

ដោយ $A\hat{D}C+D\hat{C}B=90^o$



$\Rightarrow D\hat{A}'C=90^o$

M កណ្តាល AB

Q កណ្តាល DB

$\Rightarrow MQ=\dfrac{AD}{2}$ & $(MQ)//(AD)$ (1)

N កណ្តាល AC

P កណ្តាល DC $\quad\Rightarrow NP=\dfrac{AD}{2};(NP)//(AD)\quad(2)$

តាម (1)និង (2)នាំអោយ MNPQ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

តែ $MN=\frac{BC}{2}=\frac{AD}{2}=MQ$; $Q\hat{M}N=D\hat{A}'C=90^{o}\ (MQ//A'D;MN//A'C)$

$\Rightarrow$ MNPQ ជាការេ ។

$S_{MNPQ}=MQ^{2}=\frac{QN^{2}}{2}$

តាង K កណ្ដាល [AD] $\Rightarrow KQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$; $KN=\frac{DC}{2}=\frac{c}{2}$

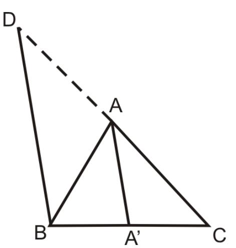
តែ $|QN|\geq|KN-KQ|=\frac{|a-c|}{2}$

យើងបាន $S_{MNPQ}\geq\frac{(a-c)^{2}}{8}$ ។

២៦. *ស្រាយថា* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}$

តាង $[AA')$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A ។

តាម B គូសបន្ទាត់ស្រប AA' កាត់បន្លាយ (CA) ត្រង់ D ។



នោះ $(BD)//(AA')\Rightarrow B\hat{D}A=A'\hat{A}C$; $D\hat{B}A=B\hat{A}A'$

តែ $B\hat{A}A'=A'\hat{A}C$

$\Rightarrow B\hat{D}A=D\hat{B}A\Rightarrow AB=AD$

ម្យ៉ាងទៀត $(BD)//(AA')\Rightarrow\frac{AC}{DC}=\frac{A'A}{DB}\Leftrightarrow\frac{1}{AA'}=\frac{DC}{AC.DB}=\frac{AC+AD}{AC.DB}$

$\Rightarrow\frac{1}{AA'}>\frac{AC+AD}{AC.(AB+AD)}=\frac{AC+AB}{2AC.AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

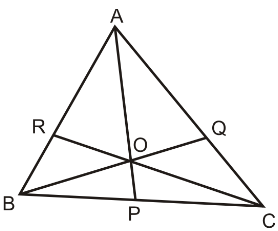
$\Rightarrow\frac{1}{l_a}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad(1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow\frac{1}{l_b}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\quad(2)$; $\frac{1}{l_c}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad(3)$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ $(1);(2);(3) \Rightarrow \frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

ដូចនេះ $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។

២៧ . *ស្រាយបញ្ជាក់ថា $OP + OQ + OR < BC$*



យើងឧបមាថា $A\hat{P}B > 90^o$

$\Rightarrow A\hat{P}B > A\hat{B}P$

$AB > AP$

តែ $\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow BC > AB$

នោះ $BC > AP$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow BC > CR ; BC > BQ$

យើងមាន $\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{OP}{AP}$; $\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}=\frac{OQ}{BQ}$; $\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{OR}{CR}$

នោះ $\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=1$

$\Leftrightarrow \frac{OP}{BC}+\frac{OQ}{BC}+\frac{OR}{BC}<1$

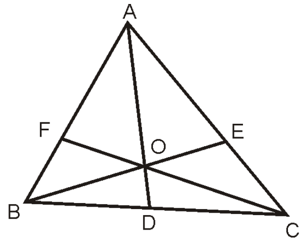
$\Rightarrow OP+OQ+OR<BC$

ដូចនេះ $OP+OQ+OR<BC$ ។

២៨. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:*

a. $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=2$

យើងមាន $\frac{OA}{AD}=\frac{AD-OD}{AD}=1-\frac{OD}{AD}$



$$\frac{OB}{BE}=1-\frac{OE}{BE}\ ;\ \frac{OC}{CF}=1-\frac{OF}{CF}$$

គេបាន $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=$

$$=3-\left(\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}\right)=3-1=2$$

ដូចនេះ $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=2$ ។

b. $\frac{OA}{OD}+\frac{OB}{OE}+\frac{OC}{OF}\geq 6$

យើងមាន $\frac{OA}{OD}=\frac{AD-OD}{OD}=\frac{AD}{OD}-1=\frac{S_{ABC}}{S_{OBC}}-1$

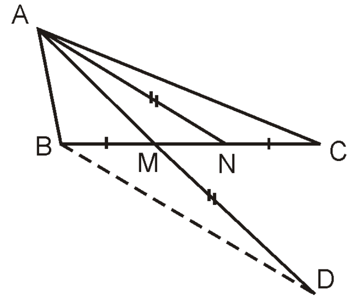
ដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow \frac{OB}{OE}=\frac{S_{ABC}}{S_{OAC}}-1;\ \frac{OC}{OF}=\frac{S_{ABC}}{S_{OAB}}-1$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OD}+\frac{OB}{OE}+\frac{OC}{OF}=S_{ABC}\left(\frac{1}{S_{OBC}}+\frac{1}{S_{OAC}}+\frac{1}{S_{OAB}}\right)-3$$

$$=(S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB})\left(\frac{1}{S_{OBC}}+\frac{1}{S_{OAC}}+\frac{1}{S_{OAB}}\right)-3$$

$$\geq 9-3=6$$

២៩. ស្រាយថា $AB + AC > AM + AN$



បន្លាយ AM អោយបាន AN = MD

យើងមាន $A\hat{N}C = A\hat{M}N + M\hat{A}N$

$\Rightarrow A\hat{N}C > A\hat{M}N = B\hat{M}D$

$\Rightarrow \ AC > BD$

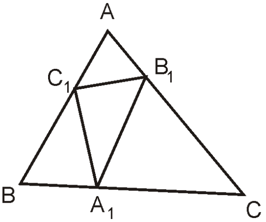
ΔABD មាន $AD < AB + BD < AB + AC$

$\Leftrightarrow \ AM + MD < AB + AC$

$\Leftrightarrow \ AM + AN < AB + AC$

ដូចនេះ <u>AB + AC > AM + AN</u> ។

៣០. សំរាយបញ្ជាក់



តាង $S_1 = S_{AC_1B_1}; S_2 = S_{BC_1A_1}; S_3 = S_{CA_1B_1}; S = S_{ABC}$

គេបាន $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{AC_1.AB_1}{AB.AC}$; $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{BC_1.BA_1}{AB.BC}$;

$\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{CA_1.B_1C}{BC.AC}$

$\Rightarrow \dfrac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = \dfrac{AC_1.BC_1}{AB^2}.\dfrac{AB_1.B_1C}{AC^2}.\dfrac{BA_1.CA_1}{BC^2}$

តែ $\dfrac{AC_1.BC_1}{AB^2} \le \dfrac{(AC_1 + BC_1)^2}{4AB^2} = \dfrac{AB^2}{4AB^2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S}.\dfrac{S_2}{S}.\dfrac{S_3}{S} \le \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $\dfrac{S_1}{S}; \dfrac{S_2}{S}; \dfrac{S_3}{S}$ មានតំលៃតូចជាងរឺស្មើ $\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \ S_1 \le \dfrac{1}{4}S$ រឺ $S_2 \le \dfrac{1}{4}S$ រឺ $S_3 \le \dfrac{1}{4}S$

ដូចនេះ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $\Delta AB_1C_1; \Delta BC_1A_1; \Delta CA_1B_1$

មានក្រលាផ្ទៃតូចជាងរឺស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃក្រលាផ្ទៃ ΔABC ។

៣១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^2}{8}$

យើងមាន $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

$\Rightarrow 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3.4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

យើងពិនិត្យ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$
$$= 2 - \left[\cos^2(A+B) + \cos(A+B)\cos(A-B)\right]$$
$$= \frac{9}{4} - \left[\left[\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A-B)\right] \le \frac{9}{4}$$

គេបាន $\frac{27R^2}{4} \ge m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge 3\sqrt[3]{m_a^2.m_b^2.m_c^2}$

$\Rightarrow$ $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^2}{8}$ ។

៣២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $l_a r_a + l_b r_b + l_c r_c \le p^2$

យើងមាន $S = r_a(p-a) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow r_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$

ហើយ $l_a = \frac{2\sqrt{bc}.\sqrt{p(p-a)}}{b+c}$

គេបាន $l_a.r_a = \frac{2\sqrt{bc}.\sqrt{p(p-a)}}{b+c}.\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$

$$=\frac{2\sqrt{bc}.\sqrt{p(p-b)(p-c)}}{b+c}$$

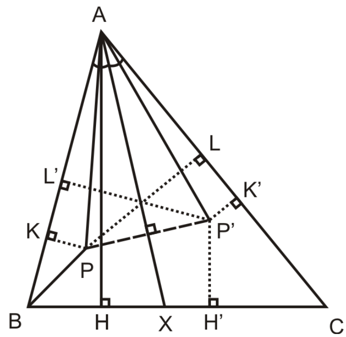
$$\leq p\sqrt{(p-b)(p-c)}\leq p(\frac{p-b+p-c}{2})=p.\frac{a}{2}$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $l_b.r_b \leq p.\frac{b}{2};\ l_c.r_c \leq p.\frac{c}{2}$

$\Rightarrow l_a.r_a + l_b.r_b + l_c.r_c \leq p\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = p^2$ ។

៣៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

a. $x+y+z \geq 2(p+q+r)$



តាង P' ជាចំនុចឆ្លុះនៃ P ធៀបកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ [AX) របស់មុំ A ។

គេបាន $PA = P'A = x$

$PA = P'K' = p$

$PL = P'L' = r$

យើងមាន $S_{ABC} = S_{P'AB} + S_{P'BC} + S_{P'CA}$

$\Leftrightarrow\ ah_a = cr + bp + ah'\ (h' = P'H')$

$\Leftrightarrow\ cr + bp = a(h_a - h') \leq ax$

$\Rightarrow\ x \geq \frac{c}{a}r + \frac{b}{a}p\ \ (1)$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ គេបាន $y \geq \frac{a}{c}r + \frac{b}{c}q\ \ (2)$

$z \geq \frac{c}{b}q + \frac{a}{b}p\ \ (3)$

យក (1) + (2) + (3) $\Rightarrow\ x+y+z \geq \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)r + \left(\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\right)p + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)q$

តាមវិសមភាព Cauchy $\Rightarrow$ $\underline{x+y+z \geq 2(r+p+q)}$

b. $xyz \geq 8pqr$

តាម (1), (2) & (3) ក្នុងសំនួរ (a) និង ដោយប្រើវិសមភាព Cauchy គេបាន:

$$x \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}rp},\ \ y \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c^2}rq},\ z \ge \sqrt{\frac{ac}{b^2}pq}$$

$$\Rightarrow\ xyz \ge 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}p^2q^2r^2} = 8pqr$$ ។

៣៤. កំនត់តំលៃ p តូចបំផុត

តាមរូបមន្ត Heron យើងបាន $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

តាមរូបមន្ត Cauchy គេបាន $(p-a)(p-b)(p-c) \le \left[\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right]^3 = \frac{p^3}{27}$

$$\Rightarrow\ S^2 \le \frac{p^4}{27} = \frac{1}{16\times 27}(a+b+c)^4\ \ (1)$$

តាមវិសមភាព Bunyakovsky:

+ $(a+b+c)^2 \le (1+1+1)(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$

  $\Rightarrow\ (a+b+c)^4 \le 9(a^2+b^2+c^2)^2$

+ $(a^2+b^2+c^2)^2 \le 3(a^4+b^4+c^4)$

គេបាន $(a+b+c)^4 \le 27(a^4+b^4+c^4)$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow\ S^2 \le \frac{1}{16\times 27}.27(a^4+b^4+c^4)$

$$\Leftrightarrow\ S^2 \le \frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4)$$

បើ $p \ge \frac{1}{16}$ នោះ $S^2 \le p(a^4+b^4+c^4)$

ដូចនេះ តំលៃ p តូចបំផុតគឺ $\underline{p = \frac{1}{16}}$ ។

៣៥. <u>*ស្រាយបញ្ជាក់ថា:*</u> $m_a^2+m_b^2+m_c^2\ge 3\sqrt{3}S$

យើងមាន $\begin{cases} b^2+c^2=2m_a^2+\dfrac{a^2}{2} \\ c^2+a^2=2m_b^2+\dfrac{b^2}{2} \\ a^2+b^2=2m_c^2+\dfrac{c^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow\ m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\ \ (1)$

តាមរូបមន្ត Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

តាមរូបមន្ត Cauchy គេបាន $(p-a)(p-b)(p-c)\le\left[\dfrac{3p-(a+b+c)}{3}\right]^3=\dfrac{p^3}{27}$

$\Rightarrow S\le\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\ S\le\dfrac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}\le\dfrac{(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)}{4.3\sqrt{3}}=\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4.3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\ 3\sqrt{3}S\le\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}\ \ (2)$

តាម (1) & (2) $\Rightarrow$ $\underline{m_a^2+m_b^2+m_c^2\ge 3\sqrt{3}S}$ ។

៣៦. <u>*ស្រាយបញ្ជាក់ថា:*</u> $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}\ge\sqrt[3]{\dfrac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$

យើងនមាន $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$

យើងបាន $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S}=\dfrac{p}{S}=\dfrac{a+b+c}{2S}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}\ge\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{abc}{S^3}}$

ដោយ $S=\frac{abc}{4R}=pr \Rightarrow \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{abc}{\left(\frac{a^2b^2c^2}{16R^2}\right).(pr)}}=3\sqrt{\frac{2R^2}{abcpr}}$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \geq \sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}}$$ ។

៣៧. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:* $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 16S^2$

យើមាន:

$+\ 4S^2=b^2c^2\sin^2 A \Leftrightarrow 16S^2=4b^2c^2\sin^2 A$

$+\ a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2=(b^2+c^2-a^2)^2=4b^2c^2\cos^2 A$

$\Rightarrow 16S^2+a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2=4b^2c^2$

$\Leftrightarrow 16S^2=2(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)$ (1)

តាមវិសមភាព Bunyakovsky:

$(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2) \leq \sqrt{(b^4+a^4+c^4)(c^4+b^4+a^4)}=(a^4+b^4+c^4)$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow$ $\underline{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 16S^2}$ ។

៣៨. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:* $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

យើងមាន $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}=\frac{c}{(p-a)(p-b)} \geq \frac{c}{\left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2}=\frac{4}{c}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ យើងបាន $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}$ (2) ; $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$ (3)

យក (1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ $\underline{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ ។

៣៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}$

យើងមាន $2S = ah_a = bh_b = ch_c$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a};\ \frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b};\ \frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c}$

យើងស្រាយថា $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow b^2c+ac^2+a^2b\geq a^2c+bc^2+ab^2$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(b-c)(c-a)\geq 0\ \ (*)$$

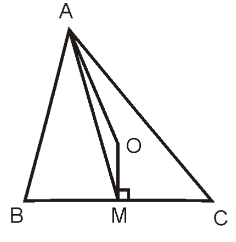
តាមសម្មតិកម្ម $A\geq B\geq C \Rightarrow a\geq b\geq c \Rightarrow (*)$ ពិត

ដូចនេះ $\underline{\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}}$ ។

៤០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq\frac{R+r}{r}$

តាង (O, R) ជារង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។

M, N, P ជាចំនុចកណ្តាល BC, CA & AB រៀងគ្នា ។



គេបាន $AM < OA+OM$

$$\Leftrightarrow m_a < R+OM$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_a}{h_a}<\frac{R}{h_a}+\frac{OM}{h_a}$$

នាំអោយ $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<R\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+\frac{OM}{h_a}+\frac{ON}{h_b}+\frac{OP}{h_c}$

យើងពិនិត្យ + $\frac{OM}{h_a}+\frac{ON}{h_b}+\frac{OP}{h_c}=\frac{aOM+bON+cOP}{2S}=\frac{2S}{2S}=1$

+ $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<\frac{R}{r}+1 \Leftrightarrow \underline{\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le\frac{R+r}{r}}$ ។

៤១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\ge 27S^2$

យើងមាន $\begin{cases} b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2} \\ c^2+a^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2} \\ a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\ge\frac{9}{4}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $h_a^2+h_b^2+h_c^2=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 4.3S^2\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$ (2)

យក $(1)\times(2)\Rightarrow \underline{(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\ge 27S^2}$ ។

៤២. ក) ស្រាយថា $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

យើងមាន : $ah_a=2S=r(a+b+c)\Rightarrow h_a=r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$

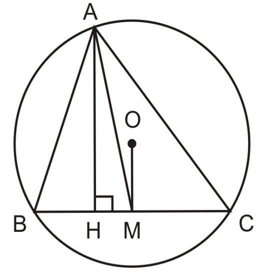
ធ្វើដូចគ្នាដែរ : $h_b=r\left(1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)$, $h_c=r\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$

$$\Rightarrow h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

តាមវិសមភាព Cauchy : $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 6$

$$\Rightarrow h_a + h_b + h_c \geq 9r$$

ខ) ស្រាយថា $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{r}$



យើងមាន : $AO + OM \geq AM$

$$\Rightarrow AO \geq AM - OM$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AM} \geq 1 - \frac{OM}{AM}$$

ដោយ $AH \leq AM \Rightarrow \frac{1}{AH} \geq \frac{1}{AM}$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AM} \geq 1 - \frac{OM}{AH}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO}{AM} \geq 1 - \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} \Rightarrow \frac{R}{m_a} \geq 1 - \frac{S_{BOC}}{S}$$

ធ្វើដូចគ្នាដែរគេបាន : $\frac{R}{m_b} \geq 1 - \frac{S_{COA}}{S}$, $\frac{R}{m_c} \geq 1 - \frac{S_{AOB}}{S}$

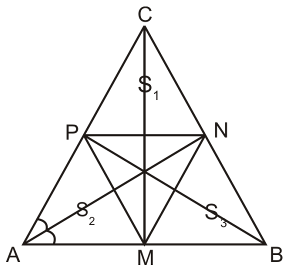
$$\Rightarrow \frac{R}{m_a} + \frac{R}{m_b} + \frac{R}{m_c} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$$ ។

៤៣. ក) ស្រាយថា $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$

តាង : $S_{ABC} = S$, $S_{CPN} = S_1$, $S_{AMP} = S_2$, $S_{BMN} = S_3$

$$\Rightarrow S_{MNP} = S - S_1 - S_2 - S_3$$

ដោយ AN ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ



$$\Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{AC}{AB} = k$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{BN} = k+1 \text{ និង } \frac{CN}{BC} = \frac{k}{k+1}$$

យើងមាន : $\Delta\ CPN \sim \Delta\ ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_{PNC}}{S} = \frac{S_1}{S} = \left(\frac{CN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_1 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 . S$$

យើងមាន : $\frac{S_{MBN}}{S_{MBC}} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{k+1}$

$\Delta\ APM \cong \Delta\ BMN$ (ជ-ម-ជ)

$$\Rightarrow \frac{S_{APM} + S_{BMN}}{S} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_{APM} + S_{BMN} = \frac{S}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = S - \frac{S}{k+1} - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 . S = \frac{k}{(k+1)^2} . S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{(k+1)^2}{k} = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \text{ ។}$$

ខ) ស្រាយថា $S_{MNP} < \frac{S_{ABC}}{4}$ -

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន : $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2$

សញ្ញា (=) កើតមានកាលណា : k = 1

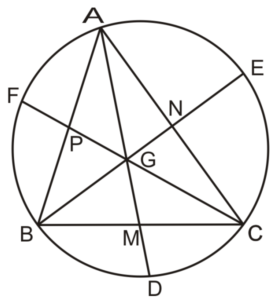
តែបើ $k \neq 1 \Rightarrow \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \Rightarrow \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 > 4$

ដូចនេះ : $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} > 4 \Rightarrow S_{MNP} < \frac{S_{ABC}}{4}$ ។

៤៤. *<u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា:</u>* $\frac{3}{R} \le \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \le \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right)$

តាង AM, BN, CP ជាបណ្តាមេដ្យាននៃ ΔABC,

តាង $AB = c,\ AC = b,\ BC = a,\ AM = m_a$



យើងបាន : $MD.MA = MB.MC \Rightarrow MD.m_a = \frac{a^2}{4}$

នាំអោយ $MD = \frac{a^2}{4m_a}$ ដោយ $GD = GM + MD =$

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a} \ge 2\sqrt{\frac{m_a}{3}.\frac{a^2}{4m_a}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

យើងបាន : $\frac{1}{GD} \le \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{BC}$.

ស្រាយដូចគ្នាដែរចំពោះអង្កត់ GE និង GF,ហើយបូកអង្គនិងអង្គយើងបាន :

$$\frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \le \sqrt{3}\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$$

តែ $GA = \frac{2}{3}m_a$, នាំអោយ $\frac{GA}{GD} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}} = \frac{8m_a^2}{4m_a^2 + 3a^2}$.

អនុវត្តន៍តាមរូបមន្តគណនាមេដ្យានយើងបាន : $4m_a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2$

នោះ $\frac{GA}{GD} = \frac{2\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)}{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 3a^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

ធ្វើដូចគ្នាដែរចំពោះផលធៀប : $\frac{GB}{GE}; \frac{GC}{GF}$ យើងបាន :

$$\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=\frac{3a^2+3b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}=3.$$

យើងមាន : $\frac{AD}{GD}=\frac{AG+GD}{GD}=1+\frac{AG}{GD}$, ហើយធ្វើដូចគ្នាដែរចំពោះ $\frac{BE}{GE},\frac{CF}{GF}$

យើងបាន : $\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}=3+\frac{GA}{GB}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=6 \qquad (1)$

ដោយបណ្ដាអង្កត់ AD, BE, CF ធំជាង 2R នាំអោយតាម (1)យើងបាន :

$$6=\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}\le\frac{2R}{GD}+\frac{2R}{GE}+\frac{2R}{GF}=2R\left(\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\right)$$

នាំអោយ : $\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\ge\frac{6}{2R}=\frac{3}{R}.$

ដូចនេះ $\frac{3}{R}\le\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\le\sqrt{3}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$ ។

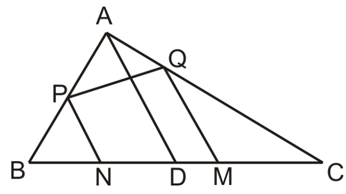
---

៤៥. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:* $S_{MNPQ}\le\max\{S_{ABD},S_{ACD}\}$

តាង $\frac{AP}{AB}=x$ និង $\frac{AQ}{AC}=y,$

ចំពោះ $0<x,\ y<1$,យើងបាន :

$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=\frac{AP.AQ}{AB.AC}=xy$, នាំអោយ $S_{APQ}=xy.S_{ABC} \qquad (1)$



តាមរូបមន្តយើងមាន : $\frac{BN}{BD}=\frac{BP}{BA}=1-x$

$$\frac{CM}{CD}=\frac{CQ}{CA}=1-y$$

នាំអោយ $S_{BNP}=(1-x)^2.S_{ABD} \qquad (2)$

$S_{CMQ}=(1-y)^2.S_{ACD} \qquad (3)$

តាម (1) , (2) និង (3) យើងបាន :

$$S_{MNPQ}=S_{ABC}-S_{APQ}-S_{BNP}-S_{CMQ}$$

$$=\left[(1-xy)-(1-x)^2\right].S_{ABD}+\left[(1-xy)-(1-y)^2\right].S_{ACD}$$
$$=\left(2x-xy-x^2\right).S_{ABD}+\left(2y-xy-y^2\right).S_{ACD}$$

ដោយ $2x-xy-x^2=x(2-y-x)>0$ និង $2y-xy-y^2=y(2-x-y)>0$

នាំអោយ $S_{MNPQ}\le\left[\left(2x-xy-x^2\right)+\left(2y-xy-y^2\right)\right].\max\{S_{ABD},S_{ACD}\}$

$$\Leftrightarrow\ S_{MNPQ}\le\left[2(x+y)-(x+y)^2\right].\max\{S_{ABD},S_{ACD}\}$$
$$\Leftrightarrow\ S_{MNPQ}\le\left[1-(x+y-1)^2\right].\max\{S_{ABD},S_{ACD}\}$$

នាំអោយ $S_{MNPQ}\le\max\{S_{ABD},S_{ACD}\}$

សញ្ញា (=) កើតមានកាលណា $S_{ABD}=S_{ACD}$ និង

x + y = 1,ហើយ BD = AC និង $\frac{AP}{AB}+\frac{AQ}{AC}=1$ ។

៤៦. គណនាក្រលាផ្ទៃធំបំផុតនៃ ΔABC

តាង S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$\Rightarrow\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ តែ $p=\frac{10}{2}=5$

នោះ $S=\sqrt{5(5-a)(5-b)(5-c)}\ \Leftrightarrow S^2=5(5-a)(5-b)(5-c)$

តាមវិសមភាព Cauchy: $(5-a)+(5-b)+(5-c)\ge 3\sqrt[3]{(5-a)(5-b)(5-c)}$

$\Leftrightarrow$ 15-(a+b+c) $\ge 3\sqrt[3]{(5-a)(5-b)(5-c)}$ (a + b + c = 10)

$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^3\ge(5-a)(5-b)(5-c)\Leftrightarrow\frac{5^4}{3^3}\ge 5(5-a)(5-b)(5-c)=S^2$

$\Rightarrow S\le\frac{25\sqrt{3}}{9}$ ដូចនេះ MaxS = $\frac{25\sqrt{3}}{9}$

សមភាពកើតឡើងកាលណា a = b = c $\Rightarrow\Delta ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

យើងមាន: $AL^2 = AI^2 - IL^2 = AK^2 + IK^2 - IL^2$

$BH^2 = BI^2 - IH^2 = BL^2 + IL^2 - IH^2$

$CK^2 = IC^2 - IK^2 = CH^2 + IH^2 - IK^2$

$\Rightarrow AL^2 + BH^2 + CK^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$

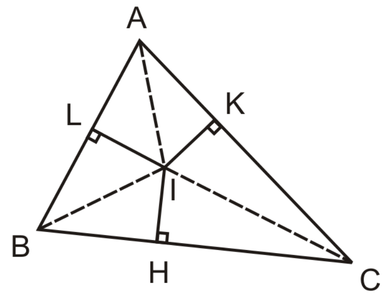
$\Leftrightarrow 2(AL^2 + BH^2 + CK^2) = (AL^2 + BL^2) + (BH^2 + CH^2) + (AK^2 + KC^2)$

យក a; b ជាពីរចំនួនវិជ្ជមាន

នោះតាមវិសមភាព Cauchy

គេបាន $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$



គេបាន:

$$\begin{cases} AL^2 + BL^2 \geq \dfrac{(AL+BL)^2}{2} = \dfrac{AB^2}{2} \\ BH^2 + CH^2 \geq \dfrac{(BH+HC)^2}{2} = \dfrac{BC^2}{2} \\ AK^2 + KC^2 \geq \dfrac{(AK+KC)^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} \end{cases}$$

នោះ $2(AL^2 + BH^2 + CK^2) \geq \dfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

$(AL^2 + BH^2 + CK^2) \geq \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

$\min(AL^2 + BH^2 + CK^2) = \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

សមភាពកើតមានកាលណា AL=LB; BH=HC; CK=KA

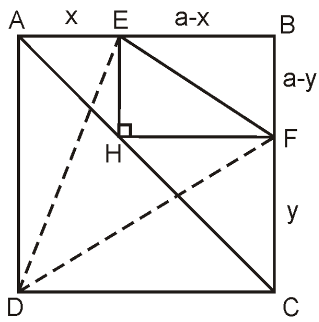
នាំអោយ L; H; K ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AB; BC;AC

តែ $(IL) \perp (AB)$; $(IH) \perp (BC)$; $(IK) \perp (AC)$

ដូចនេះដើម្បីអោយផលបូកតូចបំផុតលុះត្រាតែ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។

៤៨. កំនត់ទីតាំង M ដើម្បីអោយ S_{DEF} មានតំលៃតូចបំផុត

យើងមាន:



$$S_{DEF} = S_{ABCD} - (S_{BEF} + S_{AED} + S_{FCD})$$
$$= a^2 - \left[\frac{1}{2}(a-x)(a-y) + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay\right]$$
$$= a^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 - ax - ay + xy + ax + ay\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2 - xy\right) \geq \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{(x+y)^2}{4}\right]$$

$\Delta \perp HFC$ មាន $H\hat{C}F = 45^o \Rightarrow HFC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាត

$\Rightarrow HF = y = EB = a\text{-}x \;\Rightarrow x + y = a$

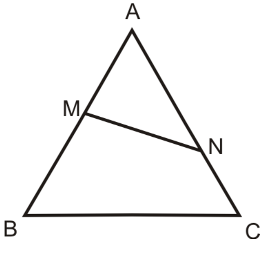
នាំអោយ $S_{DEF} \geq \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{3a^2}{8} \;\Rightarrow\; \min S_{DEF} = \frac{3a^2}{8}$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $x=y \Leftrightarrow x=a-x \Leftrightarrow\; x = \frac{a}{2}$

គេបាន E កណ្តាល [AB]

ដូចនេះ H កណ្តាល [AC] ធ្វើអោយ S_{BEF} តូចបំផុត ។

៤៩. រកទីតាំងចំនុច M & N ដើម្បីអោយ S_{AMN} ធំបំផុត



យើងមាន $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{AB-MB}{MB}+\frac{AC-NC}{NC}=1 \Leftrightarrow \frac{AB}{MB}+\frac{AC}{NC}=3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{NC}\right)AB=3 \quad \Leftrightarrow \frac{AB(MB+NC)}{MB.NC}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{AB}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{NC}$$

$$S_{AMN}=\frac{1}{2}AM.AN\sin 60^{o}=\frac{(AB-MB)(AC-NC)}{4}=\frac{(AB-MB)(AB-NC)}{4}$$

$$=\frac{AB^2-(MB+NC)AB+MB.NC}{4}=\frac{AB^2-2MB.NC}{4}$$

តាម Cauchy: $\frac{1}{MB}+\frac{1}{NC}\geq 2\sqrt{\frac{1}{MB.NC}} \Leftrightarrow \frac{3}{AB}\geq 2\sqrt{\frac{1}{MB.NC}}$

$$\Leftrightarrow 2MB.NC\geq \frac{4AB^2}{9}$$

នាំអោយ $S_{AMN}\leq \frac{AB^2-\frac{4AB^2}{9}}{4}=\frac{AB^2}{36}$

តំលៃ $\max S_{AMN}=\frac{AB^2}{36}$

តំលៃនេះកើតឡើងកាលណា $MB=NC\Rightarrow \left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MB}\right)AB=3$

$$\Leftrightarrow MB=\frac{2AB}{3} \ \& \ NC=\frac{2AC}{3}$$

ដូចនេះតំលៃ S_{AMN} ធំបំផុតកាលណា $MB=\frac{2AB}{3}; NC=\frac{2AC}{3}$ ។

៩០. ក) *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:* $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$

គូស BE ស្របនឹង PQ , គូស CF ស្របនឹង PQ

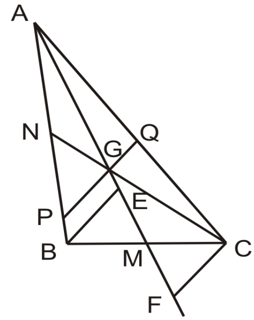
$\Rightarrow \Delta BME\cong\Delta CMF$ (ម-ជ-ម) រឺបាក $ME=MF$

យើងមាន : $\frac{AB}{AP}=\frac{AE}{AG}$, $\frac{AC}{AQ}=\frac{AF}{AG}$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=\frac{AE+AF}{AG}=\frac{(AM-ME)+(AM+MF)}{AG}=\frac{2AM}{AG}=2.\frac{3}{2}=3$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$$

ខ) *រកតំលៃអតិបរមានិងតំលៃអប្បបរមានៃ x*



កាលណា (d) កាត់តាម B និង G $\Rightarrow$ ចំនុច $P\equiv B$

$\Rightarrow AP=AB\Rightarrow x=c$

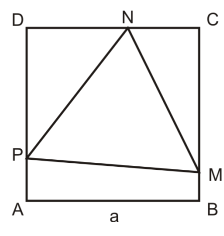
កាលណា (d) កាត់តាម C និង G $\Rightarrow P\equiv N$

ជាចំនុចកណ្តាលនៃ AB

$\Rightarrow AP=AN\Rightarrow x=\frac{c}{2}\Rightarrow\frac{c}{2}\le x\le c$

ដូចនេះតំលៃអតិបរមានៃ x គឺ c និង តំលៃអប្បបរមានៃ x គឺ $\frac{c}{2}$ ។

៥១. ក) <u>*បង្ហាញថា:*</u> $CN^2-AP^2=2\,DP.BM$



យើងមាន: $MN^2=MC^2+CN^2=(a-BM)^2+CN^2$

ហើយ : $MP^2=AB^2+(BM-AP)^2=a^2+(BM-AP)^2$

$\Rightarrow\ (a-BM)^2+CN^2=a^2+(BM-AP)^2$

$\Leftrightarrow\ CN^2-AP^2=2aBM-2BM.AP=2BM(a-AP)$

$=2\,BM.DP$

ដូចនេះ : $CN^2-AP^2=2\,DP.BM$ ។

ខ) *កំនត់ទីតាំង M,N,P*

យើងមាន : $S_{MNP} = \dfrac{MP^2\sqrt{3}}{4}$, នាំអោយ : S_{MNP} អប្បបរមា $\Leftrightarrow$ MP ខ្លីបំផុត

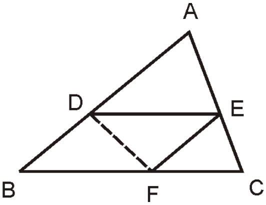
$\Leftrightarrow$ MP = a $\Leftrightarrow$ MP // AB

យើងបាន : $\Delta\, PDN \cong \Delta\, MCN \Rightarrow ND = NC$

$\Rightarrow$ N ជាចំនុចកណ្តាល CD នាំអោយ $CM = DP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ។

៥២. *ស្រាយថា* $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$

យើងមាន $S_{BDF} = \dfrac{1}{2}S_{BDEF}$



$$\Rightarrow \frac{S_{BDEF}}{2S_{ADE}} = \frac{S_{BDF}}{S_{ADE}} = \frac{1/2.BD.BF.\sin B}{1/2.AD.DE.\sin D}$$

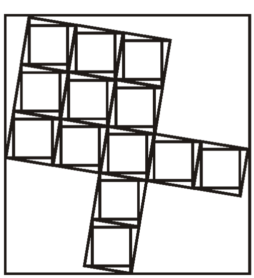
$$= \frac{EF.BF.\sin B}{AD.BF.\sin B} = \frac{EF}{AD}$$

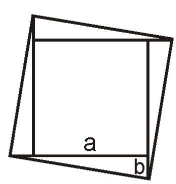
យើងពិនិត្យឃើញថា $\Delta ADE \sim \Delta EFC \Rightarrow \dfrac{EF}{AD} = \sqrt{\dfrac{S_{EFC}}{S_{ADE}}}$

$$\Rightarrow \frac{S_{BDEF}}{2S_{ADE}} = \sqrt{\frac{S_{EFC}}{S_{ADE}}} \Rightarrow S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{EFC}.S_{ADE}}$$ ។

៥៣. *គណនាក្រលាផ្ទៃតំបន់ ABCBDEFGHIJ*

ក្នុងការេនីមួយៗ គូសបន្ទាត់ឈរពីរ និង ដេកពីរដូចបានបង្ហាញ។ អង្កត់ទាំង 4 ផ្ទួប នឹងជ្រុងការេ បង្កើតបានត្រីកោណកែង 4 ប៉ុនគ្នា។ យក a & b ជាប្រវែងជ្រុងជាប់នៃ ត្រីកោណទាំងនោះ។ តាមរូប គេបានប្រវែង





បណ្ដោយ និង ទទឹង នៃចតុកោណកែងគឺ $5a+3b$ & $5a+b$ ។

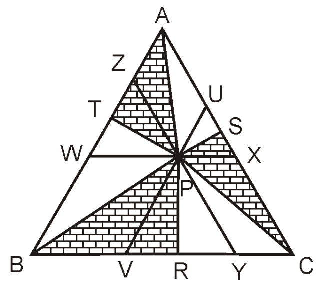
គេបាន $\begin{cases} 5a+3b=28 \\ 5a+\ \ b=26 \end{cases} \Rightarrow \ a=5 \& b=1$

ប្រវែងជ្រុងនៃការេនីមួយៗគឺ $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{26}$

ក្រលាផ្ទៃនៃការេនីមួយៗគឺ $\sqrt{26}\times\sqrt{26}=26$

ដូចនេះក្រលាផ្ទៃនៃតំបន់ ABCBDEFGHIJ គឺ $\underline{13\times 26=333}$ ។

៥៤. បង្ហាញថា ផលបូកក្រលាផ្ទៃឆ្នូតទាំងបីស្មើ $\frac{1}{2}$ នៃក្រលាផ្ទៃ ΔABC



គូសបន្ទាត់ (UV), (WX), (YZ) ស្របនឹងជ្រុងនឹងជ្រុងទាំង 3 នៃ ΔABC ។

នោះ មុំទាំង3នៃ ΔPVY មានតំលៃ 60^o

$\Rightarrow \Delta PVY$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$\Rightarrow$ កំពស់ PR ចែក ΔPVY ជាពីរប៉ុនគ្នាដែលម្ខាងមានផ្ទៃឆ្នូត ។

ដូចគ្នាដែរចំពោះ ΔPXU & ΔPZW (1)

យើងពិនិត្យចតុកោណ PWBV មាន (WP)//(BV) & (BW)//(VP)

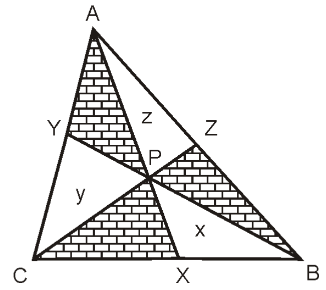
$\Rightarrow$ PWBV ជាប្រលេឡូក្រាម $\Rightarrow$ BP ចែក PWBV ជាពីរប៉ុនគ្នាដែលម្ខាងមានផ្ទៃឆ្នូត

ដូចគ្នាដែរចំពោះ ចតុកោណ PXCY & PZAU (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow$ ផលបូកក្រលាផ្ទៃឆ្នូតទាំងបីស្មើ $\frac{1}{2}$ នៃក្រលាផ្ទៃ ΔABC ។

៥៥. ស្រាយថាត្រីកោណតូចទាំង6 មានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា

ដោយជ្រើសរើសយកឯកតាសមស្របមួយ យើងអាចសន្មតថាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនីមួយៗ ដែលមានផ្ទៃឆ្នូតមានតំលៃស្មើ 1ឯកតាក្រលាផ្ទៃ។



តាង x, y, z ជាក្រលាផ្ទៃនៃ ΔBXP, ΔCYP & ΔAZP

ដោយ ΔPBX & ΔPCX មានកំពស់ដូចគ្នា

$$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{BX}{CX} \Leftrightarrow x=\frac{BX}{CX}$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ ΔABX & $\Delta ACX \Rightarrow \frac{1+x+z}{2+y}=\frac{BX}{CX}$

នោះ $x=\frac{1+x+z}{2+y} \Leftrightarrow x=\frac{1+z}{1+y}$ (1)

ដូចគ្នានេះដែរគេបាន $y=\frac{1+x}{1+z}$ (2), $\quad z=\frac{1+y}{1+x}$ (3)

យក $(1)\times(2)\times(3) \Rightarrow xyz=1$

$\Rightarrow x=y=z=1$ ជារឹសមួយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

ឧបមាថាយើងអាចរករឹសផ្សេងទៀតបាន

បើ $x>1$ តាម (1) $\Rightarrow z>y \Rightarrow \frac{1+y}{1+x}>\frac{1+x}{1+z} \Rightarrow (1+y)(1+z)>(1+x)^2$

$$\Rightarrow (1+z)^2>(1+x)^2 \Rightarrow z>x>1 \text{ (a)}$$

តែ $y=\frac{1}{xz} \Rightarrow y<1 \Rightarrow y<x \Rightarrow 1+y<1+x$

តាម (3) $z=\frac{1+y}{1+x}<1$ (b)

តាម (a) & (b) $\Rightarrow x>1$ ធ្វើអោយប្រព័ន្ធសមីការគ្មានរឹស

$\Rightarrow$ x, y, z មិនអាចធំជាង 1

នោះ $x<1$ តាម (1) $\Rightarrow z<y \Rightarrow \frac{1+y}{1+x}<\frac{1+x}{1+z}$

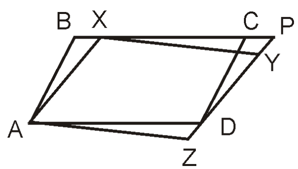
$\Rightarrow (1+y)(1+z)<(1+x)^2 \Rightarrow (1+z)^2<(1+x)^2 \Rightarrow z<x$

តាម (2) $y=\frac{1+x}{1+z}>\frac{1+z}{1+z}>1$ មិនអាច

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានរឹសតែមួយគត់គឺ $x=y=z=1$

<u>ដូចនេះត្រីកោណតូចទាំង6មានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា</u> ។

៥៦. បង្ហាញថា ប្រលេឡូក្រាមទាំងពីរមានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា



តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាយ BC & ZY ។

ដោយ (AX)//(DP) & (AD)//(XP)

នាំអោយ AXPD ជាប្រលេឡូក្រាម

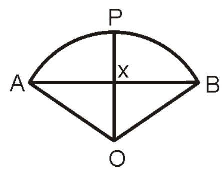
យើងឃើញថាប្រលេឡូក្រាម AXYZ & AXPD មាន ជ្រុង AX រួមគ្នា និង ZY & DP ត្រួតលើគ្នា

$\Rightarrow S_{AXYZ}=S_{AXPD}$ (1)

ដូចគ្នាដែរចំពោះ ABCD & AXPD $\Rightarrow S_{ABCD}=S_{AXPD}$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow \underline{S_{AXYZ}=S_{ABCD}}$ ។

៥៧. គណនាក្រលាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយធ្នូកោង និង បន្ទាត់ដេក



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់កាំ r ដែលមានធ្នូ AB

PX ជាបន្ទាត់ឈរ

$\Rightarrow$ OP & PX ត្រួតលើគ្នា

យើងមាន $PX=5,\ AX=BX=5\sqrt{3}$ គេបាន $OX=r-5$

AOX ជាត្រីកោណកែង $\Rightarrow (r-5)^2+(5\sqrt{3})^2=r^2 \Rightarrow r=10$

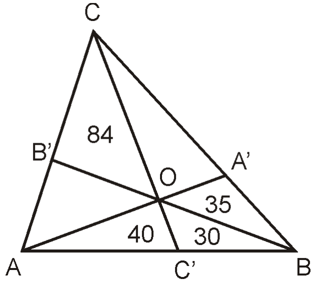
នាំអោយ $BX=\frac{\sqrt{3}}{2}OB \Rightarrow X\hat{O}B=60^o$

ក្រលាផ្ទៃចំនិតរង្វង់គឺ $\frac{\pi}{3}.10^2=\frac{100\pi}{3}$

ក្រលាផ្ទៃ ΔABO គឺ $\frac{1}{2}.5.10\sqrt{3}=25\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ ក្រលាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយធ្នូកោង និង បន្ទាត់ដេកគឺ $\underline{\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}}$ ។

៥៨. គណនា S_{ABC}



តាង $S_1=S_{AB'O}\,;S_2=S_{OCA'}$

យើងមាន $S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB\cdot \sin A\hat{O}B$

$$S_{OBA'}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OA'\cdot \sin B\hat{O}A'$$

គេបាន $\frac{S_{AOB}}{S_{OBA'}}=\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{\sin A\hat{O}B}{\sin B\hat{O}A'}$

ដោយ $A\hat{O}B+B\hat{O}A'=180^o \Rightarrow \sin A\hat{O}B=\sin B\hat{O}A'$

នោះ $\frac{S_{AOB}}{S_{OBA'}}=\frac{OA}{OA'}=\frac{40+30}{35}=2$

ធ្វើដូចគ្នាដែរចំពោះ $\Delta OAB;\ \Delta OAB' \Rightarrow \frac{S_{OB'A}}{S_{AOB}}=\frac{S_1}{70}=\frac{OB'}{OB}$

$$\Delta OCB;\ \Delta OCB' \Rightarrow \frac{S_{B'OC}}{S_{OCB}}=\frac{84}{S_2+35}=\frac{OB'}{OB}$$

$$\Delta AOC;\ \Delta OCA' \Rightarrow \frac{S_{AOC}}{S_{OCA'}}=\frac{S_1+84}{S_2}=\frac{AO}{OA'}=2$$

គេបាន $\begin{cases} \dfrac{S_1}{70} = \dfrac{84}{S_2 + 35} & (1) \\ \dfrac{S_1 + 84}{2} = S_2 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow S_1(S_2 + 35) = 5880 \Leftrightarrow S_1\left(\frac{S_1 + 84}{2} + 35\right) = 5880$$

$$\Leftrightarrow S_1^2 + 84S_1 + 70S_1 = 11760$$

$$\Leftrightarrow S_1^2 + 154S_1 - 11760 = 0$$

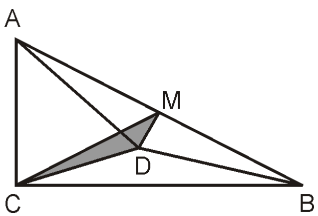
$$\Delta' = 133$$

គេបាន $S_1 = 56; S_2 = 70$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 70+56+84+40+30+35=315$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ ។

៥៩. គណនាក្រលាផ្ទៃ ΔCDM

ក្នុង ΔABC: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$



ដោយ AD=DB=15 $\Rightarrow$ ADB ជាត្រីកោណសមបាត

តែ M កណ្ដាល [AB] $\Rightarrow$ [DM] ជាមេដ្យាទ័រ [AB]

$\Rightarrow (DM) \perp (MB)$

ក្នុង $\Delta \perp DMB$:

$$DM = \sqrt{DB^2 - MB^2} = \sqrt{15^2 - \frac{25^2}{2^2}} = 5\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \sin D\hat{B}M = \frac{DM}{DB} = \frac{5\sqrt{11}}{15 \cdot 2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

នោះ $S_{DMB} = DB.BM.\sin D\hat{B}M = 15 \cdot \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{6} = \dfrac{125\sqrt{11}}{4}$

ក្នុង ΔABC: $\sin C\hat{B}A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{7}{25}$

$$D\hat{B}C = A\hat{B}C - D\hat{B}M$$

$$\sin D\hat{B}C = \sin(A\hat{B}C - D\hat{B}M)$$

$$\Leftrightarrow \sin D\hat{B}C = \sin A\hat{B}C.\cos D\hat{B}M - \sin D\hat{B}M.\cos A\hat{B}C$$

$$\Leftrightarrow \sin D\hat{B}C = \frac{7}{25}\cdot\cos D\hat{B}M - \frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\cos A\hat{B}C$$

តែ $\cos D\hat{B}M = \sqrt{1-\frac{11}{36}} = \frac{5}{6}$; $\cos ABC = \sqrt{1-\frac{49}{25^2}} = \frac{24}{25}$

$$\Rightarrow \sin DBC = \frac{7}{25}\cdot\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{24}{25} = \frac{7}{30} - \frac{4\sqrt{11}}{25}$$

គេបាន $S_{DBC} = \frac{1}{2}CB.DB.\sin D\hat{B}C = 42 - \frac{144\sqrt{11}}{5}$

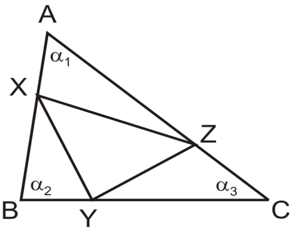
$$S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.AM.\sin C\hat{B}M = \frac{1}{2}.\frac{BC}{AB}\cdot AC\cdot AM = 42$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = 84$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = 84 - 42 + \frac{144\sqrt{11}}{5} - 42 = \frac{144\sqrt{11}}{5}$$ ។

៦០. គណនាក្រលាផ្ទៃ ΔXYZ

យើងមាន: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin\alpha_1.AB.AC = \frac{1}{2}\sin\alpha_2.BA.BC = \frac{1}{2}\sin\alpha_3.CA.CB = 1$

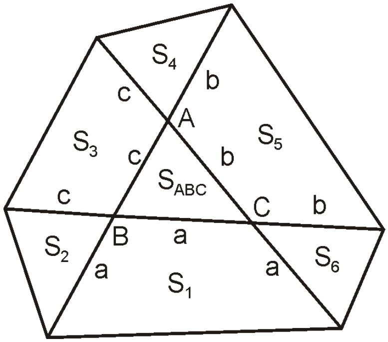


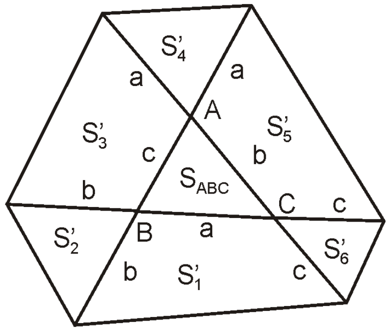
$$S_{AXZ} = \frac{1}{2}\sin\alpha_1.AX.AZ$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha_1\cdot\frac{AB}{3}\cdot\frac{2AZ}{3} = \frac{2}{9}S_{ABC} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow S_{AXZ} = S_{BXY} = S_{CZY} = \frac{2}{9}$$

$$S_{XYZ} = S_{ABC} - (S_{AXZ} + S_{BXY} + S_{CZY}) = 1 - \frac{3\times 2}{9} = \frac{1}{3}$$ ។





តាមរូបទី(1) $S_{ABC} = S_2 = S_4 = S_6$

$$S_1 + S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+c)(a+b)\sin A = \frac{1}{2}(a^2 + ab + bc + ac)\sin A$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}a(a+b+c)\sin A + \frac{1}{2}bc.\sin A - S_{ABC} = \frac{1}{2}a(a+b+c)\sin A$$

ដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow S_3 = \frac{1}{2}c(a+b+c)\sin C;\ S_5 = \frac{1}{2}b(a+b+c)\sin B$

ក្រលាផ្ទៃរូបទី(1): $S_{(1)} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_{ABC}$

នោះ $S_{(1)} = \frac{1}{2}a(a+b+c)\sin A + \frac{1}{2}b(a+b+c)\sin B + \frac{1}{2}c(a+b+c)\sin C + 4S_{ABC}$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a\sin A + b\sin B + c\sin C) + 4S_{ABC} \quad (a)$$

តាមរូបទី (2): $S'_2 = \frac{1}{2}b^2\sin B;\ S'_4 = \frac{1}{2}a^2\sin A;\ S'_6 = \frac{1}{2}c^2\sin C$

ម្យ៉ាងទៀត $S'_1 + S_{ABC} = \frac{1}{2}(b+c)^2\sin A = \frac{1}{2}c^2\sin A + \frac{1}{2}b^2\sin A + 2S_{ABC}$

$$S'_1 = \frac{1}{2}b^2\sin A + \frac{1}{2}c^2\sin A + S_{ABC}$$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ គេបាន $S'_3 = \frac{1}{2}a^2\sin C + \frac{1}{2}b^2\sin C + S_{ABC}$

$$S'_5 = \frac{1}{2}a^2 \sin B + \frac{1}{2}c^2 \sin B + S_{ABC}$$

ក្រលាផ្ទៃរូបទី(2): $S_{(2)} = S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4 + S'_5 + S'_6 + S_{ABC}$

នោះ $S_{(2)} = \frac{1}{2}a^2 \sin A + \frac{1}{2}b^2 \sin B + \frac{1}{2}c^2 \sin C + \frac{1}{2}a^2 \sin B + \frac{1}{2}c^2 \sin B$

$$+\frac{1}{2}b^2 \sin C + \frac{1}{2}a^2 \sin C + \frac{1}{2}b^2 \sin A + \frac{1}{2}c^2 \sin A + 4S_{ABC}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)(\sin A + \sin B + \sin C) + 4S_{ABC} \quad (b)$$

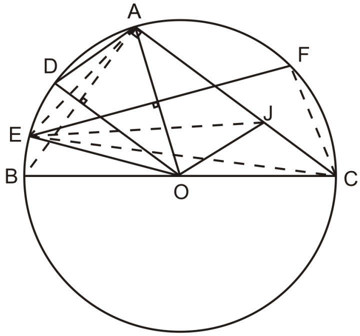
តាមទ្រឹស្តីបទ sin ក្នុង ΔABC យើងបាន:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a\sin A + b\sin B + c\sin C}$$

$\Rightarrow (a+b+c)(a\sin A + b\sin B + c\sin C) = (a^2+b^2+c^2)(\sin A + \sin B + \sin C)$ (c)

តាម (a); (b); (c) $\Rightarrow S_{(1)} = S_{(2)}$ ។

៦២. បង្ហាញថា J ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ ចារឹកក្នុង ΔCEF



យើងមាន [EF] ជាមេដ្យាទ័រនៃ [OA]

[EF]$\perp$[OA] ត្រង់ចំនុចកណ្តាល [OA]

រឺ [OA] ជាកាំរង្វង់កែង [EF]

$\Rightarrow$ [OA] ជា មេដ្យាទ័រនៃ[EF]

នោះ $A\overset{\frown}{E} = A\overset{\frown}{F} \Leftrightarrow E\hat{C}A = A\hat{C}F$

គេបាន [CJ) ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle ECF$ (1)

ដោយ [AO] $\perp$ [EF] ត្រង់ចំនុចកណ្តាល; OE = OF

$\Rightarrow$ OEAF ជាចតុកោណស្មើ

វិបាក EA = OE = AF = OF

ម្យ៉ាងទៀត D កណ្តាល $A\overset{\frown}{B} \Rightarrow$ [OD] $\perp$ [AB]

តែ $[AB] \perp [AC] \Rightarrow [OD] // [AC]$

តែ $[DA] // [OJ]$ នោះ ODAJ ជាប្រលេឡូក្រាម $\Rightarrow OD=OE=AE=AJ$

គេបាន AEJ ជាត្រីកោណសមបាត

វិបាក $A\hat{E}J = A\hat{J}E = J\hat{E}C + J\hat{C}E$

តែ $A\hat{E}J = A\hat{E}F + F\hat{E}J = J\hat{C}E + F\hat{E}J(\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} \Rightarrow A\hat{C}E = A\hat{E}F)$

$\Rightarrow F\hat{E}J = J\hat{E}C$ នាំអោយ [EJ) ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle FEC$ (2)

តាម (1) & (2) កន្លះបន្ទាត់ទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ J

<u>ដូចនេះ J ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ ចារឹកក្នុង ΔCEF</u> ។

៦៣. <u>a. ស្រាយថា</u> DH=DK

យើងមាន AK=AB; CB=CH

$\Rightarrow \Delta AKB$ & ΔCBH ជាត្រីកោណសមបាត

ដោយ $A\hat{B}K = C\hat{B}H$

គេបាន $K\hat{A}B = B\hat{C}H$

$D\hat{A}K = D\hat{A}B + K\hat{A}B$

$D\hat{C}H = D\hat{C}B + B\hat{C}H$

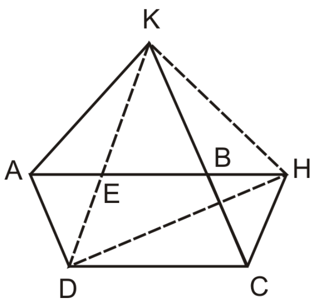
តែ $D\hat{A}B = D\hat{C}B \Rightarrow D\hat{A}K = D\hat{C}H$

ΔADK & ΔDCH មាន

AK=AB=DC

CH=BC=AD

$D\hat{A}K = D\hat{C}H$



$\Rightarrow \Delta ADK \cong \Delta DCH$ គេបានវិបាក <u>DK=DH</u>

b. ស្រាយថា $\Delta DKH \sim \Delta ABK$

តាង $[DK] \cap [AB] = \{E\}$

ដោយ (AH) // (DC) $\Rightarrow C\hat{D}H = E\hat{H}D$

តែ $C\hat{D}H = A\hat{K}E$ ($\Delta ADK \cong \Delta DCH$)

គេបាន $A\hat{K}E = E\hat{H}D$

ΔAKE & ΔEDH មាន $\begin{cases} A\hat{K}E = E\hat{H}D \\ A\hat{E}K = D\hat{E}H \end{cases} \Rightarrow E\hat{A}K = E\hat{D}H$

តែ ΔAKB & ΔKDH ជាត្រីកោណសមបាត

$\Rightarrow \underline{\Delta DKH \sim \Delta ABK}$ ។

៦៤. ស្រាយថា AC=ST ហើយបន្លាយនៃ (AC) កែងនឹង (ST)

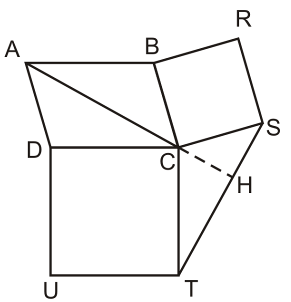
យើងមាន $D\hat{C}B + T\hat{C}S = 360^o - (D\hat{C}T + B\hat{C}S)$

$= 360^o - 180^o = 180^o$

តែ $D\hat{C}B + A\hat{D}C = 180^o$

(មុំពីរជាប់ជ្រុងមួយនៃប្រលេឡូក្រាម)

$\Rightarrow A\hat{D}C = T\hat{C}S$



ΔADC & ΔCTS មាន:

$AD = BC = CS; A\hat{D}C = T\hat{C}S; DC = CT$

$\Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta CTS$ វិបាក <u>AC = ST</u>

តាង H ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (AC) & (ST)

យើងមាន $A\hat{C}B + H\hat{C}S = 180^o - B\hat{C}S = 180^o - 90^o = 90^o$

តែ $A\hat{C}B = D\hat{A}C = C\hat{S}H \Rightarrow C\hat{S}H + H\hat{C}S = 90^o$

នាំអោយ $C\hat{H}S = 90^o$

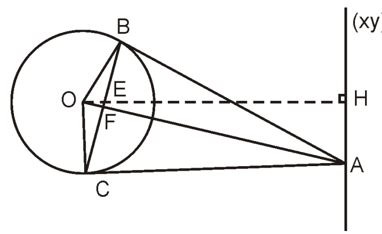
ដូចនេះ <u>បន្ទាយ (AC) កែងនឹង (ST)</u> ។

៦៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា BC កាត់តាមចំនុចនឹងមួយ

តាង H ជាចំណោលកែងនៃ O លើ (xy)

E ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (OH) និង (BC)

F ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (OA) និង (BC)



ΔOEF និង ΔHOA ជាត្រីកោណកែងមាន

$\angle O$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta OEF \sim \Delta HOA$

នោះ $\dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OH} \Leftrightarrow OE.OH = OF.OA$

ΔOCF និង ΔOCA ជាត្រីកោណកែងមាន $\angle COA$ ជាមុំរួម

នោះ $\Delta OCF \sim \Delta OCA$ វិបាក $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OF}{OC} \Leftrightarrow OA.OF = OC^2 = r^2$

$\Rightarrow OE.OH = r^2 =$ ថេរ

ដោយ [OH]ថេរ $\Rightarrow$ OE ថេរ ហើយ Eនៅលើ [OH]

ដូចនេះ E ជាចំនុចនឹង $\Rightarrow$ (BC) កាត់តាមចំនុចនឹងមួយជានិច្ច ។

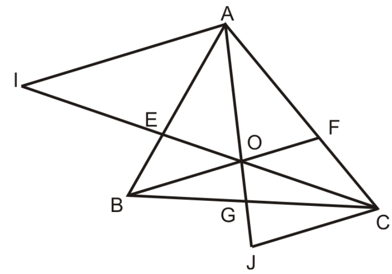
៦៦. ស្រាយថា $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BG}{GC}\cdot\dfrac{CF}{FA} = 1$

តាង O ជាចំនុចប្រសព្វរវាង AG ; BF ; CE ។

តាម A គូសបន្ទាត់ស្របនឹង(BF)កាត់បន្ទាយ(CE)ត្រង់ I

តាម C គូសបន្ទាត់ស្រប(BF)កាត់បន្លាយ(AG)ត្រង់ J

យើងមាន $(OF)//(IA) \Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CO}{OI}$



Δ OAI ~ Δ JCO ((JC) // (IA))

$\Rightarrow \frac{CO}{OI} = \frac{CJ}{AI}$

នោះ $\frac{CF}{FA} = \frac{JC}{IA}$

Δ EIA ~ Δ EOB ((OB) // (IA))

$\Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{IA}{OB}$

Δ BOG ~ Δ GJC ((BO) // (JC))

$\Rightarrow \frac{BG}{GC} = \frac{OB}{JC}$

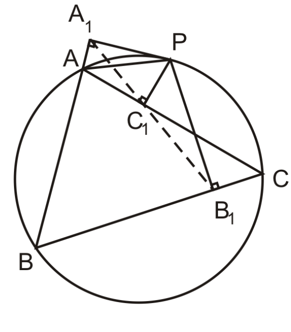
យើងបាន : $\frac{AE}{EB} . \frac{BG}{GC} . \frac{CF}{FA} = \frac{IA}{OB} . \frac{OB}{JC} . \frac{CJ}{AI} = 1$

ដូចនេះ $\frac{AE}{EB} . \frac{BG}{GC} . \frac{CF}{FA} = 1$ ។

៦៧. ស្រាយថា $A_1; B_1; C_1$ រត់ត្រង់គ្នា

យើងមាន : $(AA_1) \perp (A_1P); (B_1P) \perp (BB_1)$

$\Rightarrow$ A_1BB_1P ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។



នោះ $A\hat{B}C + A_1\hat{P}B_1 = 180^o$

តែ $A\hat{B}C + A\hat{P}C = 180^o$

យើងបាន $A_1\hat{P}B_1 = A\hat{P}C$

$\Rightarrow A_1\hat{P}A = B_1\hat{P}C \qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $(AA_1) \perp (A_1P) ; (AC_1) \perp (C_1P)$

$\Rightarrow A_1PC_1A$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

នោះ $A_1\hat{C}_1A = A\hat{P}A_1 \qquad (2)$

ហើយ $A_1\hat{B}P = A_1\hat{B}_1P$; $A_1\hat{B}P = A\hat{C}P$

$\Rightarrow A_1\hat{B}_1P = A\hat{C}P$ នោះ $B_1\hat{C}_1C = B_1\hat{P}C \qquad (3)$

តាម $(1);(2);(3) \Rightarrow A_1\hat{C}_1A = B_1\hat{C}_1C$

ដូចនេះ $A_1;C_1;B_1$ រត់ត្រង់គ្នា ។

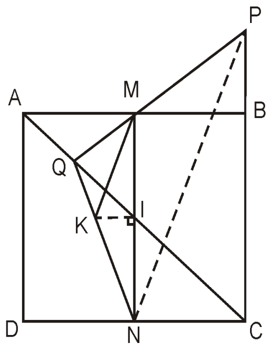
៦៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Q\hat{N}M = M\hat{N}P$

យក I ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (AC) & (MN)

នោះ I ជាចំនុចកណ្តាល [AC]

តាម I គូសបន្ទាត់កែង [MN] ហើយកាត់ (QN) ត្រង់ K

គេបាន KM = KN $\Rightarrow \Delta KMN$ ជាត្រីកោណសមបាត



វិបាក $Q\hat{N}M = K\hat{M}N$ (1)

ដោយ M & N នៅកណ្តាល [AB] & [DC]

$\Rightarrow (MN)//(BC) \Leftrightarrow \dfrac{QM}{MP} = \dfrac{QI}{IC}$

ម្យ៉ាងទៀត $(IK)//(DC) \Rightarrow \dfrac{QI}{IC} = \dfrac{QK}{KN}$

$\Rightarrow \dfrac{QM}{MP} = \dfrac{QK}{KN}$; វិបាក (MN)//(PN)

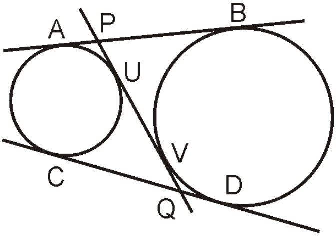
យើងទាញបាន $K\hat{M}N = M\hat{N}P$ (2)

តាម (1) & (2) ដូចនេះ $Q\hat{N}M = M\hat{N}P$ ។

៦៩. ស្រាយថា $PB = QC$

តាង $PB = x,\ QC = y,\ AP = r\ \&\ DQ = s$

យើងមាន $AB = CD \Rightarrow r + x = s + y\ \ (1)$



$PU = PA = r,\ QV = DQ = s$

$PV = PB = x,\ QU = CQ = y$

នោះ $UV = PV - PU = x - r$

$UV = QU - DQ = y - s$

គេបាន $x - r = y - s\ \ (2)$

តាម (1) & (2) $\Rightarrow x = y$

ដូចនេះ $PB = QC$ ។

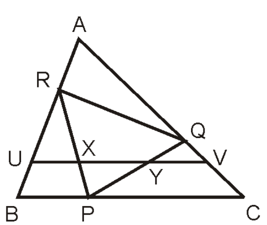
៧០. ស្រាយថា $(XY)//(BC)$

តាង U & V ជាចំនុចនៅលើ AB & AC ដែល $BU = \frac{2}{9}BA\ ,\ CV = \frac{2}{9}CA$

គេបាន $\frac{BU}{CV} = \frac{BA}{CA} \Rightarrow (UV)//(BC)\ \ \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{BU}{BR} = \frac{BU}{BA}.\frac{BA}{BR} = \frac{2}{9}.\frac{3}{2} = \frac{1}{3} = \frac{PX}{PR}$

$\Rightarrow (UX)//(BC)\ \ (2)$



ដូចគ្នាដែរ គេបាន $(YV)//(BC)\ \ (3)$

តាម (1), (2) & (3) $\Rightarrow$ X, Y នៅលើ (UV)

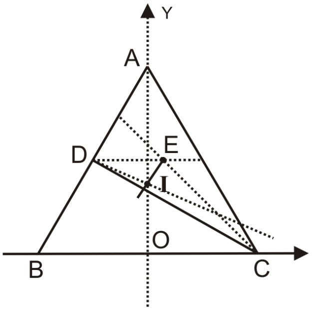
ដូចនេះ $(XY)//(BC)$ ។

៧១. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា:* $IE \perp CD$

តាង O ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC ។

តាមប្រពន្ធ័កូអរដោនេយើងបាន : O(0,0) ; A(0,a) ;

B(-c,0) ; C(c,0) ; $D\left(-\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right)$; $E\left(\frac{c}{6},\frac{a}{2}\right)$



$\overrightarrow{AB}(-c,-a)$ ។

ដោយ Δ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C

នោះតាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅគឺ I (0,y)

គេបាន : $\overrightarrow{ID}=\left(-\frac{c}{2},\frac{a}{2}-y\right)$

$ID \perp AB$ នាំអោយ $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$, $\Rightarrow -\frac{c}{2}(-c)-a\left(\frac{a}{2}-y\right)=0$

$\Rightarrow y=\frac{a^2-c^2}{2a}$ ។ នាំអោយ $I\left(0,\frac{a^2-c^2}{2a}\right)$

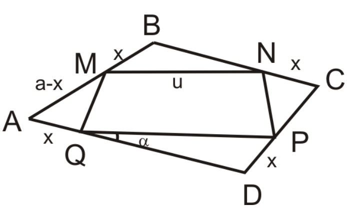
គេបាន : $\overrightarrow{IE}\left(\frac{c}{6},\frac{c^2}{2a}\right)$ និង $\overrightarrow{DC}\left(\frac{3c}{2},-\frac{a}{2}\right)$

នាំអោយ : $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC}=\frac{c}{6}.\frac{3c}{2}-\frac{c^2}{2a}.\frac{a}{2}=\frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{4}=0$ ។

ដូចនេះ $IE \perp DC$ ។

៧២. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ MNPQ ជាការេនោះ ABCD ក៏ជាការេដែរ*

តាង : $BM=AQ=DP=x, AB=a$



$MN=u$; $AM=a-x$; $P\hat{Q}D=\alpha$ ។

តាម Δ AMQ យើងបាន :

$u^2=(a-x)^2+x^2-2x(a-x)\cos A \quad (1)$

កាលណា MNPQ ជាការេនោះ : $A\hat{Q}M=90^o-\alpha$ និង $MQ=PQ=PN=NM=u$

យើងបាន : $AM^2=AQ^2+QM^2-2AQ.QM.\cos A\hat{Q}M$

$\Leftrightarrow (a-x)^2=u^2+x^2-2ux\sin\alpha \qquad (2)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុង Δ QDP យើងបាន : $\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{u}{\sin D}\Rightarrow u\sin\alpha=x\sin D$

យកជំនួសក្នុង (2) យើងបាន : $(a-x)^2=u^2+x^2-2x^2\sin D \qquad (3)$

តាម (1) និង (2) នាំអោយ : $\cos A=\dfrac{x}{a-x}(1-\sin D)\geq 0$ ។

ចតុកោណ ABCD ជាចតុកោណប៉ោងកាលណា : $0<A\leq 90^o$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន : $0<B\leq 90^o;\ 0<C\leq 90^o; 0<D\leq 90^o$ ។

$\Rightarrow A+B+C+D\leq 360^o$ នាំអោយយើងបាន : A = B = C = D = 90^o ។

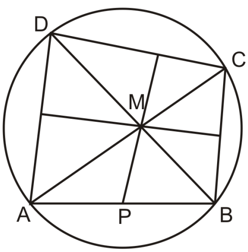
ដូចនេះចតុកោណ ABCD ជាការេ ។

៧៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ PM $\perp$ CD *នោះ* QM $\perp$ AD *ដែរ*

តាង $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ ។

យើងមាន Δ MAB ~ Δ MDC នាំអោយ

$\dfrac{MD}{MA}=\dfrac{MC}{MB}=k \Rightarrow MD=kMA,\ MC=kMB$



ដូចនេះ $\overrightarrow{CM}=\dfrac{kb}{a}\vec{a}$, $\overrightarrow{MD}=\dfrac{-ka}{b}\vec{b}$

ចំពោះលក្ខខ័ណ្ឌ a = MA និង b = MB ។ តែដោយ

$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$ នាំអោយ $CD=\dfrac{k}{ab}\left(b^2\vec{c}-a^2\vec{b}\right)$ ។

តាមសម្មតិកម្ម, PM $\perp$ CD នាំអោយ $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MP}=0$,ហើយ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MP}$

នាំអោយ $(\vec{a}+\vec{b})(b^2\vec{a}-a^2\vec{b})=0$ យើងបាន $\vec{a}\vec{b}(b^2-a^2)=0$ ។

+ បើ $b^2-a^2=0$, ហើយ a = b នោះ ABCD ជាចតុកោណព្នាយសមបាត

ហើយជាចតុកោណកែង ។

+ បើ $\vec{a}\vec{b}=0$ នោះ AC ⊥ CD នាំអោយយើងបាន :

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)$$

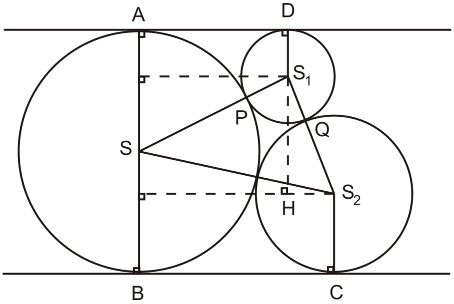
យើងបាន :

$$\overrightarrow{QM}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\left(OD^2-OA^2\right)=0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ QM ⊥ AD ។

៧៤. *គណនា R ជាអនុគមន៍នៃ r_1 & r_2*

សន្មត់ $r_2 > r_1$



តាង S'_1 ជាចំនោលកែងនៃ S_1 លើ [AB]

$\Rightarrow ABS'_1S_1$ ជាចតុកោណកែង

$(S'_1\hat{A}D = ADS_1 = 90^o)$

តាង S'_2 ជាចំនោលកែងនៃ S_2 លើ [AB]

$\Rightarrow S'_2S_2BC$ ជាចតុកោណកែង

$(S'_2\hat{B}C = B\hat{C}S_2 = 90^o)$

តាង H ជាចំនោលកែងនៃ S_1 លើ $[S_2S'_2]$

$\Rightarrow S_2S'_2\ S'_1S_1$ ជាចតុកោណកែង $(S_1\hat{S}'_1S'_2 = S'_1\hat{S}'_2S_2 = 90^o)$

តាង P; Q; R ជាចំនុចប៉ះរៀងគ្នានៃរង្វង់ទាំងបី

យើងមាន $SS_1' = SA - S_1'A = SA - SD = R - r_1$

$$SS_2' = SB - S_2'B = SB - S_2C = R - r_2$$

$\Rightarrow S_1'S_2 + S_1S_2 = AB - AS_1' - BS_2' = 2R - (r_1 + r_2)$

ក្នុង $\Delta SS_1S_1'$ មានៈ $SS_1^2 = SS_1'^2 + S_1'S_1^2$

$$S_1'S_1 = \sqrt{SS_1^2 - SS_1'^2} = \sqrt{(R+r_1)^2 - (R-r_1)^2} = 2\sqrt{Rr_1}$$

ក្នុង $\Delta SS_2S_2'$ មានៈ $S_2'S_2 = \sqrt{(R+r_2)^2 - (R-r_2)^2} = 2\sqrt{Rr_2}$

ម្យ៉ាងទៀត $S_2'S_2 = HS_2' + HS_2 = S_1'S_1 + HS_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{Rr_2} = 2\sqrt{Rr_1} + HS_2$

ក្នុង ΔS_1S_2H មានៈ

$$HS_2 = \sqrt{S_1S_2^2 - S_1H^2} = \sqrt{S_1S_2^2 - S_1'S_2'^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - [2R - (r_1+r_2)]^2}$$

$$= \sqrt{4R(r_1+r_2) - 4R^2} = 2\sqrt{R(r_1+r_2-R)}$$

នោះ $2\sqrt{Rr_2} = 2\sqrt{Rr_1} + 2\sqrt{R(r_1+r_2-R)} \Leftrightarrow \sqrt{r_2} - \sqrt{r_1} = \sqrt{r_1+r_2-R}$

$\Rightarrow \underline{R = 2\sqrt{r_1r_2}}$ ។

៧៥. គណនា CD

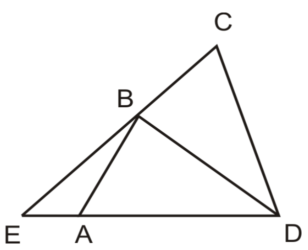
តាង E ជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្លាយ [BC] & [DA]

ក្នុង ΔECD & ΔABD មាន

$$B\hat{A}D = E\hat{D}C; A\hat{B}D = E\hat{C}D$$

$\Rightarrow \Delta ECD \approx \Delta ABD$ (1)

វិបាក $BED = BDE \Rightarrow BED$ ជាត្រីកោណសមបាត

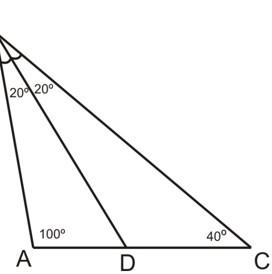


គេបាន BE = BD =10 cm

តាម (1) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BD}{EC}\Rightarrow DC=\dfrac{AB\cdot EC}{BD}=\dfrac{AB(BC+BE)}{BD}$

គេបាន $\underline{DC=\dfrac{8\cdot(10+6)}{10}=\dfrac{64}{5}}$ ។

៧៦. <u>បង្ហាញថា AB + DB = BC</u>



មាន AB = AC $\Rightarrow$ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

$\Rightarrow A\hat{C}B = ABC = \dfrac{180^o-100^o}{2} = 40^o$

មាន $A\hat{B}D=D\hat{B}C=\dfrac{A\hat{B}C}{2}=20^o$

ក្នុង ΔADB មាន:

$$\frac{\sin 60^o}{AB}=\frac{\sin 20^o}{AD}=\frac{\sin 100^o}{BD}\Leftrightarrow\frac{AB}{\sin 60^o}+\frac{AD}{\sin 20^o}+\frac{BD}{\sin 100^o}=\frac{AD+BD}{\sin 20^o+\sin 100^o}$$

$$\Leftrightarrow AB=\frac{\sin 60^o(AD+BD)}{2\sin 60^o\cos 40^o}=\frac{AD+BD}{2\cos 40^o}$$

ក្នុង ΔABC មាន: $\dfrac{BC}{\sin 100^o}=\dfrac{AB}{\sin 40^o}\Rightarrow AB=\dfrac{\sin 40^o BC}{\sin 100^o}$

$$\Rightarrow\frac{\sin 40^o BC}{\sin 100^o}=\frac{AD+DB}{2\cos 40^o}\Leftrightarrow BC=\frac{\sin 100^o(AD+DB)}{2\sin 40^o\cos 40^o}=\frac{\sin 100^o(AD+DB)}{\sin 80^o}$$

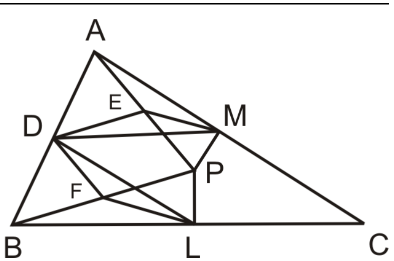
គេបាន <u>BC = AD + DB</u> ($\sin 100^o=\sin 80^o$) ។

៧៧. <u>ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ D ជាចំនុចកណ្ដាល [AB] នោះ DM = DL</u>

តាង E ជាចំនុចកណ្ដាល [AP]; F កណ្ដាល [BP]

ដោយ D កណ្ដាល [AB]

គេបាន [DE] & [DF] ជាបាតមធ្យម ΔABP



$\Rightarrow$ (DE) // (BP); $DE = \frac{1}{2} \cdot BP$

(DF) // (AP); $DF = \frac{1}{2} \cdot AP$

នាំអោយ DEPF ជាប្រលេឡូក្រាម; វិបាក $DE = FP; DF = EP; D\hat{F}P = D\hat{E}P$

$\Delta \perp$PBL មាន F កណ្ដាល [BP] $\Rightarrow$ PF=LF=DE; $P\hat{F}L = 2P\hat{B}L$

$\Delta \perp$PAM មាន E កណ្ដាល [AP] $\Rightarrow$ ME=PE=DF; $P\hat{E}M = 2P\hat{A}M$

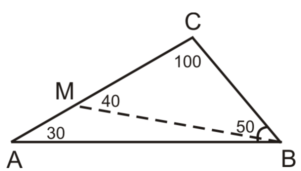
ម្យ៉ាងទៀត $P\hat{B}L = P\hat{A}M \Rightarrow P\hat{E}M = P\hat{F}L$

$$\begin{array}{l} D\hat{F}L = D\hat{F}P + P\hat{F}L \\ D\hat{E}M = D\hat{E}P + P\hat{E}M \end{array} \Rightarrow \left| D\hat{F}L = D\hat{E}M \right.$$

ក្នុង ΔDFL & ΔDEM មាន LF=DE; ME=DF; $D\hat{F}L = D\hat{E}M$

នាំអោយ $\Delta DFL \cong \Delta DEM$; វិបាក $\underline{DL = DM}$ ។

៧៨. ស្រាយថា BM=AC



ដោយ CM=CB $\Rightarrow$ ΔCMN ជាត្រីកោណសមបាត

$$C\hat{M}B = \frac{180^o - A\hat{C}B}{2} = 40^o$$

ក្នុង ΔABC: $\frac{\sin 30^o}{BC} = \frac{\sin 50^o}{AC} \Rightarrow BC = \frac{AC}{2\sin 50^o}$

ក្នុង ΔMCN: $\frac{\sin 40^o}{BC} = \frac{\sin 100^o}{BM} \Rightarrow BC = \frac{BM.\sin 40^o}{\sin 100^o}$

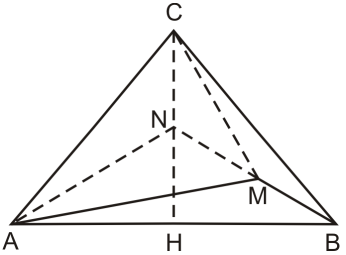
គេបាន $\frac{AC}{2\sin 50^o} = \frac{BM.\sin 40^o}{\sin 100^o} = \frac{BM.\sin 40^o}{2\sin 50^o \cos 50^o}$

$\Rightarrow AC = \frac{BM.\sin 40^o}{\cos 50^o}$ តែ $50^o+40^o=90^o \Rightarrow \sin 40^o = \cos 50^o$

ដូចនេះ $\underline{AC = BM}$ ។

៧៩. *គណនា* $A\hat{M}C$

តាង HC ជាកំពស់ ΔABC; $(MB)\cap(CH)=\{N\}$



ដោយ [CH] ជាកំពស់នៃត្រីកោណសមបាត

$\Rightarrow$ [CH] ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ & ជាមេដ្យាទ័រ

គេបាន NA=NB $\Rightarrow$ $N\hat{A}B = 30^o$

$M\hat{A}N = N\hat{A}B - B\hat{A}M = 30^o - 10^o = 20^o$

$N\hat{M}A = N\hat{A}B + A\hat{B}N = 40^o$

ΔAMN & ΔNCB មាន $N\hat{M}A = N\hat{C}B = 40^o$ $\left(N\hat{C}B = \dfrac{A\hat{C}B}{2} = 40^o \right)$

$$N\hat{A}M = 20^o = N\hat{B}C$$

$$AN = NB$$

$\Rightarrow \Delta AMN \cong \Delta NCB$

វិបាក MN=NC $\Rightarrow$ ΔNMC ជាត្រីកោណសមបាត

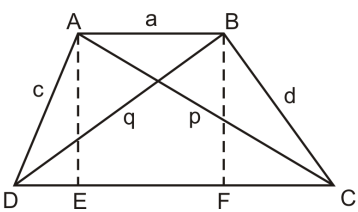
$\Delta\perp NHB$ មាន $H\hat{B}N = 30^o \Rightarrow H\hat{N}B = 60^o$

នោះ $2N\hat{M}C = 60^o \Leftrightarrow N\hat{M}C = 30^o$

ដូចនេះ $A\hat{M}C = A\hat{M}N + N\hat{M}C = 40^o + 30^o = 70^o$ ។

៨០. *ស្រាយថា* $p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab$

តាង E; F ជាចំនោលកែងនៃ A,B លើ [DC]



$\Rightarrow$AEFB ជាចតុកោណកែង; វិបាក AB=EF=a

យើងមាន $AC^2 = AE^2 + EC^2 = p^2$

$$BD^2 = BF^2 + DF^2 = q^2$$

$$p^2 + q^2 = AE^2 + EC^2 + BF^2 + DF^2 = AD^2 - DE^2 + EC^2 + BC^2 - FC^2 + DF^2$$

$= c^2 + d^2 + EC^2 + DF^2 - DE^2 - FC^2$
$= c^2 + d^2 + EC^2 + (DC - FC)^2 - DE^2 - FC^2$
$= c^2 + d^2 + (a + FC)^2 + (b - FC)^2 - DE^2 - FC^2$
$= c^2 + d^2 + a^2 + b^2 + FC^2 + FC^2 + 2aFC - 2bFC - DE^2 - FC^2$
$= c^2 + d^2 + (a - b)^2 + 2ab + FC^2 - DE^2 - 2FC(b - a)$
$= c^2 + d^2 + (DE + FC)^2 + FC^2 - DE^2 - 2FC(DE + FC) + 2ab$
$= c^2 + d^2 + DE^2 + 2DE.FC + FC^2 + FC^2 - DE^2 - 2FC.DE - 2FC^2 + 2ab$

គេបាន $\underline{p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab}$ ។

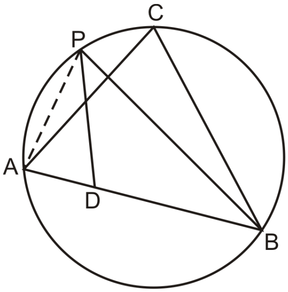
៨១. បង្ហាញថា PB=2PD

យើងមាន $A\hat{P}B = A\hat{C}B$ និង

$A\hat{D}P = A\hat{C}B$ (ស.ក)

$\Rightarrow A\hat{P}B = A\hat{D}P$

ក្នុង ΔAPB & ΔAPD មាន:



$\angle A$ ជាមុំរួម
$A\hat{P}B = A\hat{D}P$ $\Rightarrow \Delta APB \sim \Delta APD$

វិបាក $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PD}{PB} = \dfrac{AD}{AP} \Rightarrow AP^2 = AD.AB = 4AD^2$

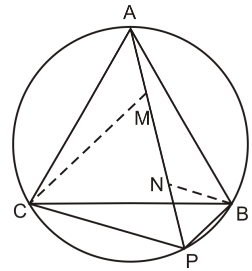
$\Rightarrow$ AP=2AD នាំអោយ $\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{AD}{2AD} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ PB=2PD ។

៨២. ស្រាយថា $PA=PB+PC$

តាង M;N ជាចំនុចលើជ្រុង [PA]

ដែល $CM=CP; BN=BP$ (1)



យើងមាន $C\hat{P}A=C\hat{B}A=60^o$

$A\hat{C}B=A\hat{P}B=60^o$ (2)

តាម (1) & (2)$\Rightarrow \Delta BPN$ & ΔCMP

ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ម្យ៉ាងទៀត $M\hat{C}A=A\hat{B}C-M\hat{C}B=60^o-M\hat{C}B$

$P\hat{C}B=P\hat{C}M-M\hat{C}B=60^o-M\hat{C}B$

$\Rightarrow M\hat{C}A=P\hat{C}B$

តែ $P\hat{C}B=P\hat{A}B \Rightarrow P\hat{A}B=M\hat{C}A$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow C\hat{A}M=N\hat{B}A$

ΔAMC & ΔANB មាន $M\hat{C}A=N\hat{A}B; CA=AB; C\hat{A}M=N\hat{B}A$

$\Rightarrow \Delta AMC \cong \Delta ANB$ វិបាក $CM=AN$ (a)

តែ $AP=AN+NP$; $CM=PC$; $NP=PB$ (b)

(a) & (b)$\Rightarrow$ <u>$AP=PB+PC$</u> ។

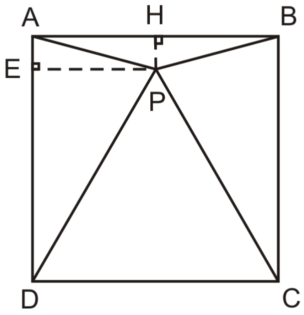
៨៣. ស្រាយថា PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស

តាង H; E ជាចំនោលកែងនៃ P លើ (AB) & (AD)

$\Rightarrow PE=AH$; $AE=PH$

តែ $P\hat{A}B=P\hat{B}A=15^o$

$\Rightarrow$ PAB ជាត្រីកោណសមបាត



វិបាក $AH = PE = \dfrac{AB}{2}$

ΔAPD & ΔPBC មាន AP=PB; AD=BC

$D\hat{A}P = 90^o - 15^o = 75^o$

$C\hat{B}P = 90^o - 15^o = 75^o \Rightarrow \Delta APD \cong \Delta PBC$

វិបាក PD=PC (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\cot 15^o = \dfrac{AH}{PH} \Rightarrow PH = \tan 15^o . AH = \dfrac{\sin 15^o}{2\cos 15^o} \cdot AB$

$$ED = AD - AE = AB - \frac{\sin 15^o}{2\cos 15^o} \cdot AB$$

$$= AB\left(1 - \frac{\sin 15^o}{2\cos 15^o}\right)$$

$$= AB\left(1 - \frac{3\sin^2 15^o}{2\cos 15^o \sin 15^o}\right)$$

$$= AB(1 - 2\sin^2 15^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB$$

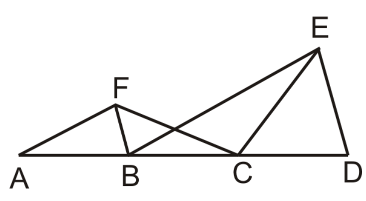
ΔPEB មាន $PD^2 = ED^2 + PE^2 = \dfrac{3AB^2}{4} + \dfrac{AB^2}{4} = AB^2$

$\Rightarrow$ PD=AB (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow$ PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៨៤. គណនា FB

ΔAFC & ΔBCE មាន:



$$\left.\begin{array}{l} AF=BC=2 \\ AC=BE=4 \\ FC=CE \end{array}\right| \Rightarrow \Delta AFC \cong \Delta BCE$$

វិបាក $F\hat{A}B = E\hat{B}C$

ΔAFB & ΔBED ជាត្រីកោណសមបាតមាន $F\hat{A}B = E\hat{B}C$

នោះ $\Delta AFB \sim \Delta BED$ វិបាក $\frac{AB}{BD} = \frac{BF}{DE}$

$\Rightarrow BF = \frac{AB.DE}{BD} = \frac{2\times 2}{4} = 1$; ដូចនេះ $\underline{BF=1}$ ។

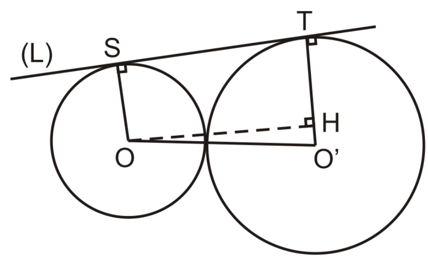
៨៥. គណនា $|ST|$

យក $R > r$

តាង H ជាចំនោលកែងពី $O \rightarrow (O'T)$

គេបាន OSTH ជាចតុកោណកែង

វិបាក $ST = OH$



$\Delta\perp OHO'$: $OH = \sqrt{OO'^2 - O'H^2}$

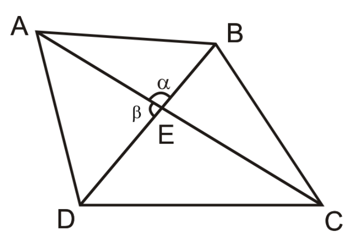
$OH = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{R'r}$

ដូចនេះ $\underline{ST = 2\sqrt{Rr}}$ ។

៨៦. គណនា $|AED|$

យើងមាន $|AEB| = \frac{1}{2}\cdot EA\cdot EB\sin\alpha$

$|AED| = \frac{1}{2}\cdot EA\cdot ED\sin\beta$



ដោយ $\alpha + \beta = 180^o \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

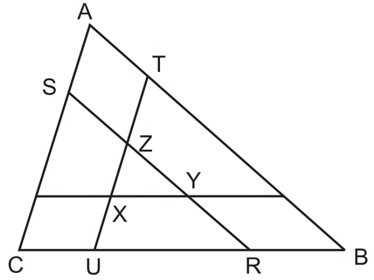
$\frac{|AEB|}{|AED|} = \frac{EB}{ED} \Rightarrow |AED| = \frac{|AEB|.ED}{EB} = 3\cdot\frac{ED}{EB}$

ដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow \dfrac{|BEC|}{|CED|} = \dfrac{EB}{ED} \Rightarrow \dfrac{|CED|}{|BEC|} = \dfrac{ED}{EB}$

$\Rightarrow \dfrac{10}{2|AED|} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow |AED| = \dfrac{10}{|AED|} \cdot 3$

ដូចនេះ $\underline{|AED| = \sqrt{15}}$ ។

៨៧. រកក្រលាផ្ទៃ ΔABC



តាង x = BC

យើងមាន $S_{APB} = \dfrac{1}{2} S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{S_{APB}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}$

ដោយ ΔAPQ ~ ΔABC

$\Rightarrow \dfrac{PQ^2}{x^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow PQ = \dfrac{\sqrt{2}x}{2}$

ដោយ ΔAPQ; ΔSCR; ΔTUB មានជ្រុងទាំងបីស្របគ្នារៀងគ្នា

ហើយ $S_{APD} = S_{SCR} = S_{TUB}$ គេបាន ΔAPQ ~ ΔSCR ~ ΔTUB

នោះ PQ = CR

ដោយ RB+CR=BC ⇒RB=BC-CR= $x - \dfrac{\sqrt{2}x}{2} = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot x$

ដោយ (RS)//(AB); (PQ)//(CB); (TU)//(AC)

⇒ PXUC; YQBR ជាប្រលេឡូក្រាម

តែ CU = RB នោះ $PX = YQ = RB = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot x$

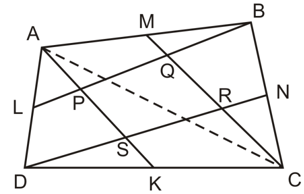
$$XY = PQ - 2PX = \frac{\sqrt{2}x}{2} - 2x + \sqrt{2}x = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)x$$

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}}=\frac{XY^2}{BC^2}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)^2 x^2}{x^2}=\frac{17-12\sqrt{2}}{2}$$

គេបាន $\underline{S_{ABC}=34+24\sqrt{2}}$ ។

៨៨. គណនាក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណ PQRS

យើងមាន : $S_{ABCD}=S_{ACD}+S_{ABC}$



តែ $S_{ACD}=2S_{ADK}$; $S_{ABC}=2S_{CMB}$

នោះ $S_{ABCD}=2(S_{ADK}+S_{CMB})$

$\Rightarrow S_{ADK}+S_{CMB}=\frac{S_{ABCD}}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត : $S_{ADK}+S_{CMB}+S_{AMQP}+S_{SRCK}+S_{PQRS}=S_{ABCD}$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ABCD}}{2}+S_{AMQP}+S_{SRCK}+S_{PQRS}=S_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow S_{PQRS}=\frac{S_{ABCD}}{2}-S_{AMQP}-S_{SRCK}$$

$$\Rightarrow S_{PQRS}=\frac{3000}{2}-513-388=599$$

ដូចនេះ $\underline{S_{PQRS}=599}$ ។

៨៩. គណនា BC

យើងមាន : $A\hat{B}D=A\hat{C}D=60^o$

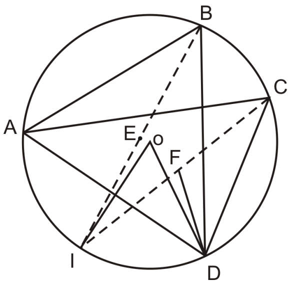
នោះចតុកោណ ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

តាង (O;R) ជារង្វង់ដែល ABCD ចារឹកក្នុង

តាង I លើរង្វង់ដែលជាចំនុចប្រសព្វរវាង (BE) និង រង្វង់

$\Rightarrow A\hat{B}I = 30^o$

យក I_1 ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (CF) និង រង្វង់



នោះ $I_1\hat{C}D = 30^o \Rightarrow A\hat{C}I_1 = 30^o$ (1)

តែ $A\hat{C}I = A\hat{B}I = 30^o$ (2)

តាម (1) និង (2) នាំអោយ I_1 នៅលើ I ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស : $R = \dfrac{AD}{2\sin 60^o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1$

ម្យ៉ាងទៀត : $I\hat{D}F = I\hat{D}A + A\hat{D}F = A\hat{B}I + \dfrac{1}{2}A\hat{D}C = 30^o + \dfrac{1}{2}A\hat{D}C$

តែ $I\hat{F}D = F\hat{D}C + F\hat{C}D = 30^o + \dfrac{1}{2}A\hat{D}C$

នោះ $I\hat{D}F = I\hat{F}D \Rightarrow ID = IF$

Δ OID មាន $OI = ID$; $I\hat{O}D = 2I\hat{B}D = 60^o$

នោះ Δ IOD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ; ID = OD = 1 គេបាន IF = 1 ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន IE = 1 ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូសស៊ីនុសក្នុង Δ IFE

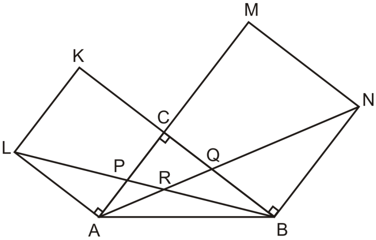
$$\cos E\hat{I}F = \frac{IF^2 + IE^2 - EF^2}{2IE.IF} = \frac{1}{2} \Rightarrow E\hat{I}F = 60^o \Rightarrow BC = 1 \text{ ។}$$

៩០. ស្រាយថា $S_{CPRQ} = S_{ABR}$

តាង $AC = p\,; BC = q \Rightarrow AB = \sqrt{p^2 + q^2}$

យើងមាន : $\frac{BC}{BK}=\frac{CP}{KL}$

$$\Rightarrow CP=\frac{BC.KL}{BK}=\frac{q.p}{p+q}$$



ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow CQ=\frac{q.p}{p+q}$

$$S_{ANB}=\frac{1}{2}AB.BN\sin A\hat{B}N=\frac{1}{2}AB.q\sin\left(90^o+A\hat{B}C\right)=\frac{1}{2}AB.q\cos A\hat{B}C$$

$$=\frac{1}{2}AB.q.\frac{q}{AB}=\frac{q^2}{2}$$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow S_{ABL}=\frac{p^2}{2}$

$$S_{APL}=\frac{1}{2}AL.AP=\frac{1}{2}AL.\left(AC-PC\right)=\frac{1}{2}p.\left(p-\frac{pq}{p+q}\right)=\frac{1}{2}\frac{p^3}{p+q}$$

$$S_{QBN}=\frac{1}{2}BN.BQ=\frac{1}{2}BN.\left(BC-QC\right)=\frac{1}{2}q.\left(q-\frac{pq}{p+q}\right)=\frac{1}{2}\frac{q^3}{p+q}$$

$$S_{ACQ}=\frac{1}{2}AC.CQ=\frac{1}{2}p.\frac{pq}{p+q}=\frac{1}{2}\frac{p^2q}{p+q}$$

$$S_{PBC}=\frac{1}{2}CP.CB=\frac{1}{2}\frac{pq^2}{p+q}$$

តាង $S=S_{APR}+S_{RQB}$

$$S_{RAB}=\frac{1}{2}\left(S_{ALB}+S_{ABN}-S_{ALP}-S_{DBN}-S\right)$$

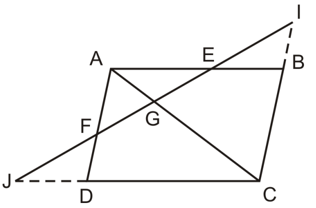
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{p^3+q^3}{p+q}-S\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{2}-\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{pq}{2}-S\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{pq}{2}-S\right)$$

$$S_{CPRQ}=\frac{1}{2}\left(S_{CAQ}+S_{CBR}-S\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{pq^2+p^2q}{p+q}-S\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{pq}{2}-S\right)$$

ដូចនេះ $S_{CPRQ} = S_{RAB}$ ។

៩១. *ស្រាយថា* $\frac{AC}{AG} = \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF}$



តាង I ; J ជាចំនុចប្រសព្វរវាង (l) នឹង (BC);(CD)

$\Delta\, AEG \sim \Delta\, GCJ\ \left(J\hat{G}C = A\hat{G}E; E\hat{A}G = G\hat{C}J\right)$

$\Rightarrow \frac{AC}{AG} = \frac{JE}{GE}$

$\Delta\, AGF \sim \Delta GIC \ \Rightarrow \frac{AC}{AG} = \frac{IF}{FG}$

គេបាន : $\frac{AC}{AG} = \frac{JE}{EG} = \frac{IF}{FG} = \frac{IE+IF}{EG+FG} = \frac{IE+IF}{EF} \quad (1)$

$\Delta\, AEF \sim \Delta\, EIB \ \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{IF}{FE}$

$\Delta\, AEF \sim \Delta\, FJD \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{JE}{EF}$

គេបាន : $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{IF+JE}{EF} \quad (2)$

តាម (1)និង (2) $\Rightarrow \frac{AC}{AG} = \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF}$ ។

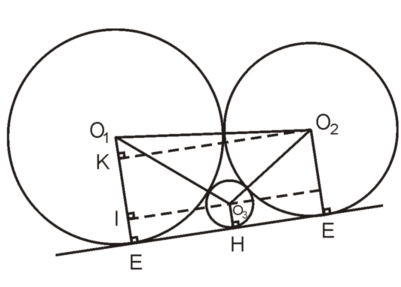
៩២. *ស្រាយបញ្ជាក់ថា* $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$

+តាង E, H, F ជាចំនុចប៉ះនឹងបន្ទាត់

របស់រង្វង់ទាំង ៣ ។

+I, J ជាចំនោលកែងនៃ O_3 លើ

(O_1E) & (O_2F) ។



+K ជាដចំនោលកែងនៃO_2លើ (O_1E)

+សន្មត $R_1 > R_2 > R_3$

គេបាន $O_1K = R_1 - R_2$

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = \sqrt{(R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2} = 2\sqrt{R_1R_2}$$

ក្នុង $\Delta\perp IO_1O_3$: $IO_3 = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1I} = \sqrt{(R_1+R_3)^2 - (R_1-R_3)^2} = 2\sqrt{R_1R_3}$

ក្នុង

$\Delta\perp JO_3O_2$: $O_3J = \sqrt{O_2O_3^2 - O_2J^2} = \sqrt{(R_2+R_3)^2 - (R_2-R_3)^2} = 2\sqrt{R_2R_3}$

ដោយ $O_3I = EH; O_3J = HF; EF = O_2K$

នោះ $O_3I + O_3J = KO_2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{R_1R_3} + \sqrt{R_2R_3} = \sqrt{R_1R_2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{R_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$ ។

៩៣. គណនាតំលៃដែលអាចមានរបស់ AE

ឧបមាថា A, B, C, D, E ជាចំនុចបិតក្នុងតំរុយអរតូណម៉ាល់ ហើយមានកូអរដោនេ

$A(4a_1, 4a_2); B(4b_1, 4b_2); C(4c_1, 4c_2); D(4d_1, 4d_2); E(4e_1, 4e_2)$

$\Rightarrow F(2a_1 + 2b, 2a_2 + 2b_2); G(2b_1 + 2c_1, 2b_2 + 2c_2); H(2c_1 + 2d_1, 2c_2 + 2d_2)$

$\& \ I(2d_1 + 2e_1, 2d_2 + 2e_2)$

$\Rightarrow$ កូអរដោនេនៃ X & Y គឺ:

$X(a_1 + b_1 + c_1 + d_1, a_2 + b_2 + c_2 + d_2); Y(b_1 + c_1 + d_1 + e_1, b_2 + c_2 + d_2 + e_2)$

គេបាន $XY = \sqrt{(a_1 - e_1)^2 + (a_2 - e_2)^2}$; $AE = 4\sqrt{(a_1 - e_1)^2 + (a_2 - e_2)^2}$

$\Rightarrow \ AE = 4XY$

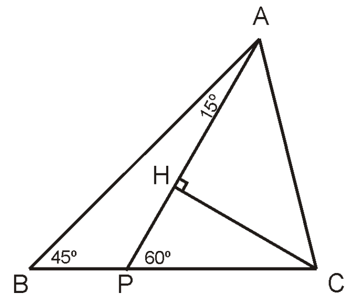
ដោយ $1 \le AE \le 5$ ហើយ $XY \in N^*$

នោះ XY = 1 $\Rightarrow$ AE = 4 ។

៩៤. គណនា $A\hat{C}B$

តាង H ជាចំនោលកែងនៃ C លើ (AP)

តាមទ្រឹស្តីបទ sin ក្នុង ΔABP:



$$\frac{AP}{\sin 45^o} = \frac{BC}{3\sin 15^o}$$

$$\Rightarrow\ AP = \frac{\sin 45^o BC}{3\sin 15^o}$$

ΔCHP ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

$$\Rightarrow\ PH = \frac{PC}{2} = \frac{\frac{2BC}{3}}{2} = \frac{BC}{3}$$

$$HC = \frac{PC\sqrt{3}}{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{3}\ \ (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $AH = AP - HP$

$$= \frac{\sin 45^o BC}{3\sin 15^o} - \frac{BC}{3} = \left(\frac{\sin 45^o}{\sin 15^o} - 1\right)\frac{BC}{3}$$

$$= \left(\frac{\sin 45^o - \sin 15^o}{\sin 15^o}\right)\frac{BC}{3} = \frac{BC\sqrt{3}}{3}\ \ (2)$$

តាម (1) & (2) នាំអោយ AH = HC $\Rightarrow\ H\hat{C}A = 45^o$

ដូចនេះ $A\hat{C}B = P\hat{C}H + H\hat{C}A = 75^o$ ។

៩៥. គណនា λ

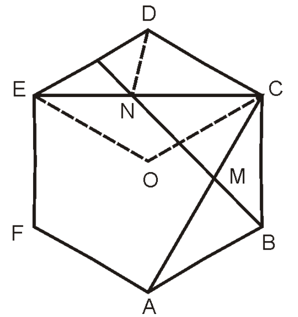
យើងមាន $\dfrac{CN}{CE} = \dfrac{AM}{AC}$

ដោយ CE = AC $\Rightarrow$ CN = AM $\Rightarrow$ EN = CM

ΔEND & ΔCMB មាន $\hat{E} = \hat{C}$, $ED = BC$, $EN = CM$

$\Rightarrow$ ត្រីកោណទាំងពីរប៉ុនគ្នា $\Rightarrow M\hat{B}C = E\hat{D}N$

& $E\hat{N}D = B\hat{M}C$



តាង $M\hat{B}C = \alpha, B\hat{M}C = \beta$

នោះ $D\hat{N}C = 180^o - \beta, C\hat{N}B = 90^o - \alpha$

$$\alpha + \beta = 180^o - M\hat{C}B = 180^o - 30^o = 150^o$$

ម្យ៉ាងទៀត

$D\hat{N}B = D\hat{N}C + C\hat{N}B = (180^o - \beta) + (90^o - \alpha) = 120^o$

យក I ឋិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត C កាំ BC $\Rightarrow$ $B\hat{I}D = 60^o$

ដោយ $B\hat{I}D + B\hat{N}D = 180^o \Rightarrow$ C, N, D, B ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ

$\Rightarrow$ CN = BC = R

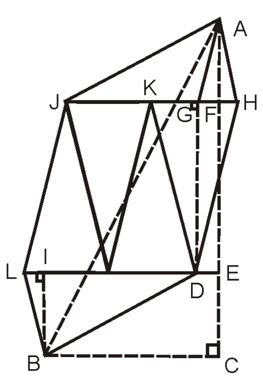
ក្នុង ΔOCE : $EC^2 = OE^2 + OC^2 - 2.OE.OC.\cos E\hat{O}C =$

$$= 2OE^2 - 2OE^2\cos 120^o = 3OE^2 = 3R^2 \Rightarrow EC = \sqrt{3}R$$

ដូចនេះ $\lambda = \dfrac{CN}{CE} = \dfrac{R}{\sqrt{3}R} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ។

៩៦. គណនាប្រវែង AB

តាង G ជាជើងកំពស់គូសចេញពី D ទៅលើ JH



C ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់គូសចេញពី B ហើយស្រប ID នឹងបន្ទាត់គូសចេញពី A ហើយស្រប DG

E ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាយ ID & AC

I ជាជើងកំពស់គូសចេញពី B លើ ID មាន G ជាជើងកំពស់នៃ ΔDH

$$\Rightarrow GH = \frac{KH}{2} = \frac{1}{2} \& DG = \sqrt{DH^2 - GH^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

ក្នុង ΔJAH & ΔAHG មាន $\angle H$ ជាមុំរួម និង $\frac{AH}{JH} = \frac{GH}{AH} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta JAH \sim \Delta AHG$ តែ JAH ជាត្រីកោណសមបាត

$\Rightarrow \Delta AHG$ ជាត្រីកោណសមបាត $\Rightarrow$ GF=DE=1/4

ម្យ៉ាងទៀត $\Delta ILB \cong \Delta AHF \Rightarrow$ IL=FH=1/4, IB=AF=$\sqrt{AH^2 - FH^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$BC = IE = LD - IL + DE = LD - IL + GF = LD = 2$$

$$AC = CE + EF + AF = IB + DG + AF = 2AF + DG = 2.\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$$

$\underline{\Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 + CA^2} = \sqrt{19}}$ ។

៩៧. ស្រាយថា $A\hat{C}D = B\hat{C}M$

ដៅចំនុច N ដែល (BM)//(CN) & CN = BM

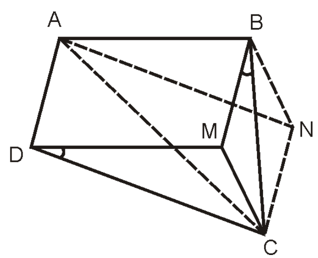
$\Rightarrow$ BNCM & ANCD ជាប្រលេឡូក្រាម

$\Rightarrow C\hat{D}M = M\hat{B}C = B\hat{C}N$

ΔABN & ΔMDC មាន $AB = DM, BN = MC$

& $AN = DC$

$\Rightarrow \Delta ABN \cong \Delta MDC$



វិបាក $B\hat{A}N = C\hat{D}M \Rightarrow B\hat{C}N = C\hat{D}M$

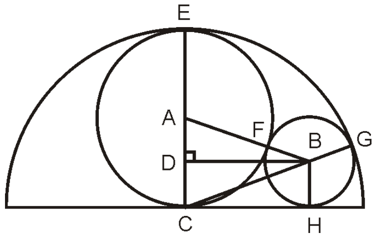
$\Rightarrow$ A, B, N, C នៅលើរង្វង់តែមួយ

$\Rightarrow C\hat{B}N = C\hat{A}N$

តែ $C\hat{B}N = B\hat{C}M \& C\hat{A}N = A\hat{C}D \Rightarrow \underline{A\hat{C}D = B\hat{C}M}$ ។

៩៨. គណនាកាំនៃរង្វង់តូច

តាង x ជារង្វាស់កាំរង្វង់តូច



ដោយរង្វង់ធំប៉ះកន្លះរង្វង់ត្រង់ផ្ចិត C

$\Rightarrow AC = 1$

- $AD = AC - DC = 1 - x$
- $AB = AF + FB = 1 + x$
- $DB^2 = CB^2 - DC^2$

$$= (CG - BG)^2 - x^2 = (2 - x)^2 - x^2 = 4 - 4x$$

ដោយ ΔADB ជាត្រីកោណកែង

$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow (1 + x)^2 = (1 - x)^2 + 4 - 4x$

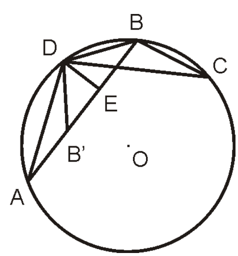
$\Rightarrow$ <u>$x = 1/2$</u> ។

៩៩. ស្រាយថា $AE = EB + BC$

ដៅ B' នៅ (AB) ដែល AB' = BC

ក្នុង $\Delta ADB'$ & ΔDBC មាន AB' = BC, AD = DC & $\hat{A} = \hat{C}$

$\Rightarrow \Delta ADB' \cong \Delta DBC$ វិបាក DB = DB'



$\Delta DB'E$ & ΔDEB ជាត្រីកោណកែង មាន DE ជាជ្រុងរួម

និង DB = DB' $\Rightarrow \Delta DB'E \cong \Delta DEB$ វិបាក EB = EB'

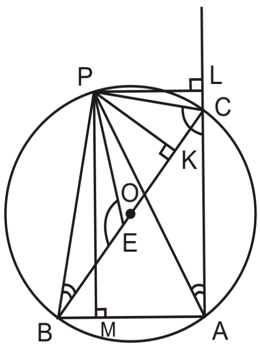
ម្យ៉ាងទៀត AE = AB' + EB' = BC + EB

<u>ដូចនេះ AE = EB + BC</u> ។

១០០. រកតំលៃអប្បបរមានៃផលបូក: $S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$

យើងមាន : $B\hat{P}C > B\hat{C}A$ ។ នៅលើជ្រុង BC ដៅចំនុច

E ដែល : $E\hat{P}C = B\hat{C}A \Rightarrow P\hat{E}B = P\hat{C}A$



ហើយ : $P\hat{B}E = P\hat{A}C$

$\Rightarrow \Delta PBE \sim \Delta PAC$ (ម-ម)

យើងមាន : $P\hat{B}A = P\hat{E}C$ និង $P\hat{C}E = P\hat{A}B$

$\Rightarrow \Delta PBA \sim \Delta PEC$

$$\Rightarrow \frac{AC}{PL} = \frac{BE}{PK} (1) , \frac{AB}{PM} = \frac{CE}{PK} (2)$$

យក (1) + (2) យើងបាន :

$$\frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM} = \frac{BE+CE}{PK} = \frac{BC}{PK} \Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$$

យើងបាន : $S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{2a}{x}$ ។

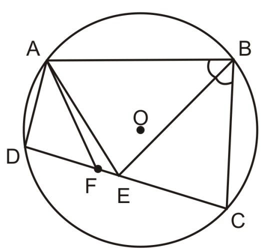
ដូចនេះ S អប្បបរមា កាលណា x អតិបរមា។

យើងបាន : $PK \le PO = R$

PK អតិបរមាស្មើ R កាលណា $K \equiv O \Rightarrow \min S = 4$ ។

១០១. ក) បង្ហាញថា : AD + BC = CD

នៅលើជ្រុង DC គេដៅចំនុច F ដែល DF = DA



បើ $F \equiv E \Rightarrow CD = CE + ED = CB + DA$

យើងបាន : AD + BC = CD

បើ $F \ne E$: នោះ F ស្ថិតនៅចន្លោះ D និង E

យើងបាន :

$$A\hat{F}E - A\hat{B}E = \left(180^\circ - D\hat{F}A\right) + \frac{A\hat{B}C}{2} = 180^\circ - D\hat{A}F + \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\Rightarrow A\hat{D}C = 180^\circ - 2D\hat{A}F = 180^\circ - \hat{B}$$

$$\Rightarrow 2D\hat{F}A = 180^\circ - 180^\circ + \hat{B}$$

$$\Rightarrow D\hat{F}A = D\hat{A}F = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow A\hat{F}E + A\hat{B}E = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ចតុកោណ ABEF ចារឹកក្នុង $\Rightarrow A\hat{F}B = E\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2}$, $C\hat{B}F = \frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \Delta BCF$ ជាសមបាតកំពូល C $\Rightarrow$ CB = CF

យើងបាន : CD = CF + FD = BC +AD

ខ) គណនា $\frac{S_{ADE}}{S_{BCE}}$

ដោយពីចំនុច E ស្មើចំងាយទៅជ្រុង AD , AB , BC

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = \frac{AD}{BC} = \frac{CD - BC}{BC} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = \frac{CD}{BC} - 1 = k - 1$$

ដូចនេះ $\frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = k - 1$ ។

១០២. ស្រាយថា ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ក្នុង ΔABC: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

នោះ $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}; \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}; \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$

តាម Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

នោះ $\frac{1}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{S}$; $\frac{1}{\sqrt{p(p-b)}} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{S}$

$$\frac{1}{\sqrt{p(p-c)}}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-a)}}{S}$$

នាំអោយ $\dfrac{a+b+c}{2S}=\dfrac{\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)}}{S}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)=\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)} \quad (1)$$

តាម Cauchy: $p-b+p-c \geq 2\sqrt{(p-)(p-c)}$

$\Leftrightarrow \ 2p-bc \geq 2\sqrt{(p-)(p-c)}$

ដូចគ្នាដែរ $\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}\geq\sqrt{(p-b)(p-c)}\\ \dfrac{b}{2}\geq\sqrt{(p-a)(p-c)}\\ \dfrac{c}{2}\geq\sqrt{(p-a)(p-b)}\end{array}\right\}$

គេបាន $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\geq\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)} \quad (2)$

តាម (1); (2) គេបាន $a = b = c$

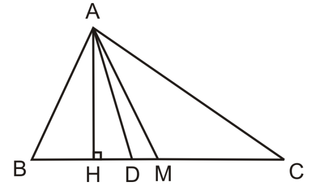
ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

១០៣ . *ស្រាយថាD នៅចន្លោះM & H*

យើងមាន : $BH^2=AB^2-AH^2$

$CH^2=AC^2-AH^2$

តែ $AB<AC \ (\hat{B}>\hat{C})$



$\Rightarrow BH < CH \;\Leftrightarrow\; BH < \dfrac{BC}{2} = BM \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $B\hat{A}H = 90^o - C\hat{B}A$

$H\hat{A}C = 90^o - A\hat{C}H$

នោះ $B\hat{A}H < H\hat{A}C \quad (\hat{B} > \hat{C})$

$\Rightarrow B\hat{A}H < \dfrac{B\hat{A}C}{2} = B\hat{A}D$

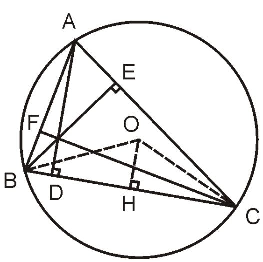
គេបាន $BH < BD \quad (2)$

[AD) ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A $\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} < 1$

$\Rightarrow BD < DC \;\Leftrightarrow\; BD < \dfrac{BC}{2} = BM \quad (3)$

តាម (1) ; (2) និង (3) នាំអោយ D នៅចន្លោះ H និង M ។

១០៤. *ស្រាយថា* $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{r}{R}$



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC

H ជាជើងចំនោលកែងពី O លើ BC

យើងមាន $AF = AC\cos A,\ AE = AB\cos A$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$

ហើយ $\angle A$ ជាមុំរួមរវាង ΔABC & ΔAFE

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AFE$

វិបាក $\dfrac{FE}{BC} = \dfrac{AF}{AC} = \cos A \Rightarrow FE = BC\cos A$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $FD = AC\cos B,\ DE = AB\cos C$

បរិមាត្រនៃ ΔEDF គឺ $P' = FE + FD + DE = BC\cos A + AC\cos B + DE\cos C$

ម្យ៉ាងទៀត $S_{OBC} = \frac{1}{2}OH.BC = \frac{1}{2}R\cos A.BC$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $S_{OAC} = \frac{1}{2}R\cos B.AC,\ S_{OAB} = \frac{1}{2}R\cos C.AB$

ដោយ $S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} + S_{OAB}$ & $S_{ABC} = rp = \frac{1}{2}rP$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}rP = \frac{1}{2}R(\cos A.BC + \cos B.AC + \cos C.AB)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{rP = RP' \ \Rightarrow \ \frac{P'}{P} = \frac{r}{R}}$$ ។

១០៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន

$$2(a^3+b^3+c^3) = a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3) = 2abc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2abc\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + 2abc\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + a^3+b^3+c^3$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = 2abc(\cos A + \cos B + \cos C)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$$\cos A + \cos B + \cos C - \frac{3}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) - \frac{3}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1 - \frac{3}{2}$$

$$= -2\left[\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= -2\left[\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}\right]$$

$$\leq 0$$

$$\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\ a^3+b^3+c^3\leq 2abc.\frac{3}{2}=3abc\ \ (1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy $\Rightarrow\ a^3+b^3+c^3\geq 3abc\ \ (2)$

តាម (1) & (2) គេបាន $a^3+b^3+c^3=3abc$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $a=b=c$

<u>ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស</u> ។

១០៦. <u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស</u>

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន $(m_a+m_b+m_c)^2=\dfrac{81R^2}{4}\ \ (1)$

យើងពិនិត្យ :

$$(m_a+m_b+m_c)^2=m_a^2+m_b^2+m_c^2+2(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)$$

$$\leq 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

$$=3\left[\left(\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=9R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\ \ (2)$$

តាម (1) & (2) គេបាន:

$$9R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\geq\frac{81R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\cos A \cos B \cos C \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(A+B) + \cos(A+B)\cos(A-b) + \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A-B) \leq 0 \ \ (*)$$

យើងឃើញថា (*) អាចកើតមានចំពោះសញ្ញា “=”

គេបាន $m_a = m_b = m_c$

<u>ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស</u>

១០៧. <u>ស្រាយថា</u> $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

យើងមាន $r = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)} = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$$\Rightarrow \ a = r(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2})$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $b = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$

$$c = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\bullet (a-b) = r\left(\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\bullet (b-c) = r\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$\bullet (c-a) = r\left(\cot\frac{A}{2} - \cot\frac{C}{2}\right)$$

គេបាន $\underline{(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0}$ ។

១០៨. កំនត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC

a. $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$

យើងមាន $p-a = \frac{1}{2}(b+c-a)$

$p-b = \frac{1}{2}(c+a-b)$

$p-c = \frac{1}{2}(a+b-c)$

តាមសម្មតិកម្ម គេបានៈ

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \frac{1}{16}(a+b-c)^2(a-b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (c+a-c)(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

<u>នាំអោយ ΔABC ជាត្រីកោណកែង</u> ។

b. $S = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$

តាមទ្រឹស្តីបទ Cauchy:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27}$$

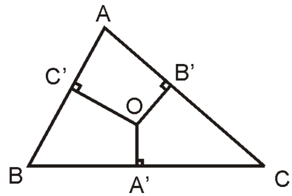
$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{3\sqrt{3}} p^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $p-a = p-b = p-c$

$\Rightarrow$ <u>ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស</u> ។

១០៩. <u>*ស្រាយថា*</u> $OA' + OB' + OC' = R + r$



តាង $OA' = \alpha,\ OB' = \beta,\ OC' = \gamma$

យើងមាន $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\cos A = \frac{\alpha}{R} \Rightarrow \alpha = R\cos A$ ហើយ $b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$

$$\Rightarrow (b+c)\alpha = 2R^2[\cos A(\sin B + \sin C)] = 2R^2(\cos A\sin B + \cos A\sin C)$$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $(c+a)\beta = 2R^2(\cos B\sin C + \cos B\sin A)$

$$(a+b)\gamma = 2R^2(\cos C\sin A + \cos C\sin B)$$

$$\Rightarrow (b+c)\alpha + (c+a)\beta + (a+b)\gamma = 2R^2[\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(A+C)]$$

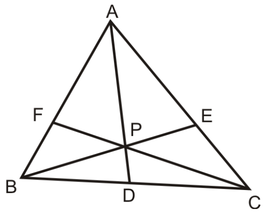
$$= 2R^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 2R^2\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{(b+c)\alpha + (c+a)\beta + (a+b)\gamma}{a+b+c} \quad (2)$$

យក (1) + (2) គេបាន <u>$OA' + OB' + OC' = R + r$</u> ។

១១០ . *បង្ហាញតំលៃ* $\frac{AP}{PD};\frac{BP}{PE};\frac{CP}{PF}$



យើងមាន : $\frac{AP}{PD}=\frac{AD-DP}{PD}=\frac{AD}{PD}-1$

តែ $\frac{AD}{PD}=\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}$,ស្រាយដូចគ្នាដែរចំពោះ $\frac{CP}{PF},\frac{BP}{PE}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{PD}+\frac{CP}{PF}+\frac{BP}{PE}=\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}+\frac{S_{ABC}}{S_{PBA}}+\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}-3$$

$$=S_{ABC}\left(\frac{1}{S_{PBC}}+\frac{1}{S_{PBA}}+\frac{1}{S_{APC}}\right)-3$$

$$=\left(S_{PBC}+S_{PBA}+S_{APC}\right)\left(\frac{1}{S_{PBC}}+\frac{1}{S_{PBA}}+\frac{1}{S_{APC}}\right)-3\geq 9-3=6$$

$\Rightarrow \frac{AP}{PD}+\frac{CP}{PF}+\frac{BP}{PE}\geq 6\Rightarrow$ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $\frac{AP}{PD},\frac{CP}{PF},\frac{BP}{PE}$ មានតំលៃលើសពី 2 ។

ឧបមាថា $\frac{AP}{PD}>2;\frac{CP}{PF}>2\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}}-1>2\ \Leftrightarrow S_{ABC}>3S_{PBC};S_{ABC}>3S_{PBA}$

$$\Rightarrow 2S_{ABC}>3\left(S_{PBC}+S_{PBA}\right)$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC}+3S_{PAC}>3\left(S_{PBC}+S_{PBA}+S_{APC}\right)$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC}+3S_{PAC}>3S_{ABC}$$

$$\Rightarrow 3S_{PAC}>S_{ABC}\ \Rightarrow 3>\frac{S_{ABC}}{S_{PAC}}\Rightarrow 2>-1+\frac{S_{ABC}}{S_{PAC}}=\frac{BP}{PE}$$

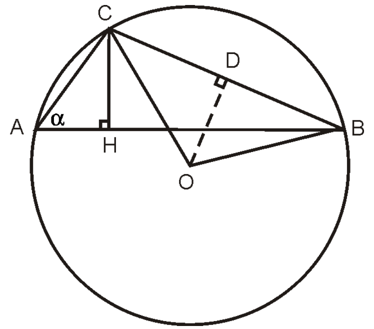
ដូចនេះ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $\frac{AP}{PD},\frac{CP}{PF},\frac{BP}{PE}$ មានតំលៃតូចជាង 2 ។

១១១. *គណនាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់*

តាង H ជាជើងចំនោលកែងពី C ទៅ AB

D ជាជើងចំនោលកែងពី O ទៅ BC

r ជាកាំរង្វង់ និង $\alpha = C\hat{A}B$



ក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O មាន $\alpha = \dfrac{C\hat{O}B}{2} = D\hat{O}B$ (1)

ΔODB ជាត្រីកោណកែងមាន

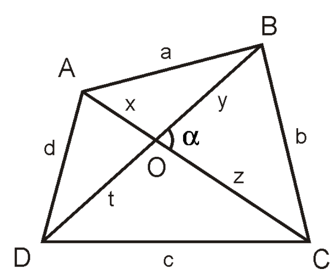
$$\sin D\hat{O}B = \frac{DB}{OB} = \frac{CB}{2OB} = \frac{5}{r} \quad (2)$$

ΔACH ជាត្រីកោណកែងមាន $\sin\alpha = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ (3)

តាម (1), (2) & (3) $\Rightarrow \dfrac{5}{r} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \underline{r = \dfrac{15}{2}}$ ។

១១២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់

យក a, b, c, d, x, y, z, t ជាប្រវែងនៃ AB, BC, CD, OA, OB, OC & OD រៀងគ្នា & $\alpha = B\hat{O}C$



ΔOAB មាន $S = pr_1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{S}{p} = \dfrac{xy\sin A\hat{O}B}{\frac{x+y+a}{2}}$

តែ $A\hat{O}B = 180^o - \alpha$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{xy\sin\alpha}{\frac{x+y+a}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{x+y+a}{xy\sin\alpha}$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{y+z+b}{yz\sin\alpha}; \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{z+t+c}{zt\sin\alpha}; \dfrac{1}{r_4} = \dfrac{x+t+d}{xt\sin\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y+a}{xy\sin\alpha} + \frac{z+t+c}{zt\sin\alpha} = \frac{y+z+b}{yz\sin\alpha} + \frac{x+t+d}{xt\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{a}{xy}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{c}{zt}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{b}{yz}+\frac{1}{x}+\frac{1}{t}+\frac{d}{xt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{xy}+\frac{c}{zt}=\frac{b}{yz}+\frac{d}{xt}$$

$$\Leftrightarrow azt+cyx=bxt+dyz$$

$$\Leftrightarrow (azt+cyx)^2=(bxt+dyz)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2z^2t^2+c^2y^2x^2+2acxyzt=b^2x^2t^2+d^2y^2z^2+2bdxyzt$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2xy\cos\alpha)z^2t^2+(z^2+t^2+2zt\cos\alpha)x^2y^2+acxyzt$$
$$=(y^2+z^2-2yz\cos\alpha)x^2t^2+(x^2+t^2-2xt\cos\alpha)y^2z^2+2bdxyzt$$

$$\Leftrightarrow 2zt\cos\alpha+2xy\cos\alpha+2ac=-2xt\cos\alpha-2yz\cos\alpha+2bd$$

$$\Leftrightarrow (c^2-z^2-t^2)+(a^2-x^2-y^2)+2ac=(d^2-x^2-t^2)+(b^2-y^2-z^2)+2bd$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2=(b+d)^2$$

$$\Leftrightarrow a+c=b+d$$

<u>ដូចនេះ ABCD ជាចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់</u> ។

១១៣. <u>ស្រាយថាតំលៃផលធៀប T មិនអាស្រ័យនឹងរូបរាងរបស់ត្រីកោណ</u>

យើងបញ្ចូល ABC ទៅក្នុងតំរុយមានគល់ A ហើយ AB ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

កំនត់យក $B(4x,0)$ & $C(4y,4z)$

ដោយ D, E, F ជាចំនុចកណ្តាល BC, CA, AB និង P, Q, Rជាចំនុចកណ្តាល

នៃមេដ្យាន AD, BE, CF គេបាន:

$$D(2x+2y,2z),\ E(2y,2z),\ F(2x,0),\ P(x+y,z),\ Q(2x+y,z)\&R(x+2y,z)$$

បណ្តាការេនៃអង្កត់នីមួយៗគឺ

$$AQ^2=(2x+y)^2+z^2=4x^2+4xy+y^2+z^2$$

$$AR^2=(x+2y)^2+4z^2=x^2+4xy+4y^2+4z^2$$

$$BP^2=(3x-y)^2+z^2=9x^2-6xy+y^2+z^2$$

$BR^2=(3x-2y)^2+4z^2=9x^2-12xy+4y^2+4z^2$

$CP^2=(x-3y)^2+9z^2=x^2-6xy+9y^2+9z^2$

$CQ^2=(2x-3y)^2+9z^2=4x^2-12xy+9y^2+9z^2$

នោះផលបូកសរុបនៃបណ្តាអង្កត់ទាំងនោះគឺ $28(x^2-xy+y^2+z^2)$ (*)

ការេប្រវែងជ្រុងនៃ ΔABC គឺ $AB^2=16x^2$, $CA^2=16x^2+16y^2$,

$BC^2=16x^2-32xy+16y^2+16z^2$

គេបាន $AB^2+BC^2+CA^2=32(x^2-xy+y^2+z^2)$ (**)

$\Rightarrow$ ផលធៀប $T=\frac{(*)}{(**)}=\frac{7}{8}$ ថេរ

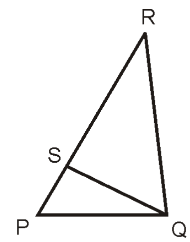
<u>ដូចនេះតំលៃផលធៀប T មិនអាស្រ័យនឹងរូបរាងរបស់ត្រីកោណ</u> ។

១១៤. <u>បង្ហាញថាមានចំនុចS មួយនៅលើPR ដែលPS & QS មានតំលៃគត់</u>

តាង PS = x និង QS = y ($x,y\in N^*$)

តាមទ្រឹស្តីបទ cosin ក្នុង ΔRPQ យើងបាន:

$13^2=15^2+8^2-2.15.8.\cos R\hat{P}Q\Rightarrow\cos R\hat{P}Q=0.5$



ពិនិត្យក្នុង ΔSPQ: $y^2=x^2+8^2-2.x.8\cos R\hat{P}Q$

$\Rightarrow y=\sqrt{x^2+8x+64}\quad(0<x<15)$

យក $x=1, 2, 3,...., 14$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការ

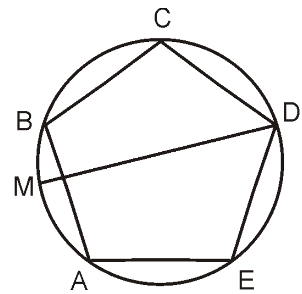
គេបានគូដែលជាចំនួនគត់គឺ (3, 7), (5, 7) & (8, 8)

<u>ដូចនេះមានចំនុច S ដែលស្ថិតនៅលើ PR ដែល PS & SQ មានប្រវែងគត់</u> ។

១១៥. <u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា</u> $MA+MB+MD=MC+ME$

តាង R ជាកាំរង្វង់ (O) និង $2x(0<x<\frac{\pi}{5})$ ជារង្វាស់មុំ ធ្នូ AM ។

តាមទ្រឹស្តីបទ sin គេបាន



$$MA = 2R\sin x\,;$$

$$MB = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)\,;$$

$$MD = 2R\sin\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)\,;$$

$$MC = 2R\sin\left(\frac{2\pi}{5}-x\right)\,;$$

$$ME = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}+x\right)$$

$$+\ MC+ME = 2R\left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}+x\right)\right]$$

$$= 2R\sin\frac{3\pi}{10}.\cos\left(\frac{\pi}{10}-x\right) = 4R\cos\frac{\pi}{5}.\cos\left(\frac{\pi}{10}-x\right)$$

$$+\ MA+MB+MD = 2R\left[\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)\right]$$

$$= 2R\left[\sin x+2\sin\frac{3\pi}{10}.\cos\left(\frac{\pi}{10}+x\right)\right]$$

$$= 2R\left[\sin x+2\cos\frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{10}+x\right)\right]$$

បើ $MA+MB+MD = MC+ME$

$$\Leftrightarrow \sin x+2\cos\frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{10}+x\right) = 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{10}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2\cos\frac{\pi}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{10}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}+x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 4\cos\frac{\pi}{5}.\sin\frac{\pi}{10}.\sin x = 4\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}\sin x \quad (*)$$

យើងធ្វើការគណនា $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

យើងមាន $\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{5}$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-2\cos^2\frac{\pi}{5}=4\cos^3\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3\frac{\pi}{5}+2\cos^2\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

តាង $t=\cos\frac{\pi}{5}$

គេបាន $4t^3+2t^2-3t-1=0$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(4t^2-2t-1)=0$$

ដោយ $t\neq -1$

$$\Rightarrow \quad 4t^2-2t-1=0$$

$t_1=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $t_2=\frac{-\sqrt{5}+1}{4}<0$ មិនយក

គេបាន $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1=2.\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}-1=\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$$

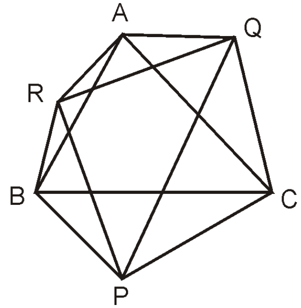
នោះ $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$

តាម (*) គេបាន $\sin x=4.\frac{1}{4}\sin x=\sin x$ ពិត

ដូចនេះ $\underline{MA+MB+MD=MC+ME}$ ។

១១៦. ស្រាយថា $Q\hat{R}P=90^o$ & $QR=RP$

តាមទ្រឹស្ដីបទ sin ក្នុង ΔAQC:



$$AQ = \frac{b}{2\sin 105^o} = \frac{b}{2\cos 15^o}$$

ដូចគ្នាដែរ $PB = \frac{a}{2\cos 15^o}$; $AR = RB = \frac{c}{2\cos 15^o}$

តាមទ្រឹស្ដីបទ cosin:

$$RP^2 = \frac{PB^2 + RB^2 - 2PB.RB.COS(B+60^o)}{2PB.RB} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B+60^o)}{4\cos^2 15^o}$$

$$RQ^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B+60^o)}{4\cos^2 15^o}$$

+ ស្រាយថា RP =RQ

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B+60^o)}{4\cos^2 15^o} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B+60^o)}{4\cos^2 15^o}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ac\cos(B+60^o) = b^2 - 2bc\cos(A+60^o)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ac\cos B + \sqrt{3}ac\sin B = b^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A$$

តាមទ្រឹស្ដីបទចំនោល ក្នុង ΔABC :

$$b = c\cos A + a\cos C \Leftrightarrow b - c\cos A = a\cos C \Leftrightarrow b^2 - bc\cos A = ab\cos C$$

$$a = c\cos B + b\cos C \Leftrightarrow a - c\cos B = b\cos C \Leftrightarrow a^2 - ac\cos B = ab\cos C$$

តាមទ្រឹស្ដីបទ sin ក្នុង ΔABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sqrt{3}ac\sin B = \sqrt{3}bc\sin A$$

គេបាន $a^2 - ac\cos B + \sqrt{3}ac\sin B = b^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A$ ពិត ។

នាំអោយ <u>RP =RQ</u> ។

+ ស្រាយថា $Q\hat{R}P = 90^o$ លុះត្រាតែ QRP ជាត្រីកោណកែង $\Rightarrow PQ^2 = 2RP^2$

យើងមាន $AQ = \frac{AC}{2\cos 15^o}$

ដោយគណនា $\cos 15^o$ តាមរូបមន្ត $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$

$\Rightarrow \cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AQ = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})AC}{2}$; $BP = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})BC}{2}$;

$QC = AQ\sqrt{2}$; $PC = BP\sqrt{2}$; $RA = RB = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})AB}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទ sin:

$$+RQ^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR.AQ\cos(A+60^o)$$
$$= AB^2(2-\sqrt{3}) + AC^2(2-\sqrt{3}) - 2AB.AC(2-\sqrt{3}).\cos(A+60^o)$$
$$= (2-\sqrt{3})\left[AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)\right]$$
$$= \frac{(2-\sqrt{3})}{2}\left[AB^2 + AC^2 + (AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A) + \sqrt{3}S\right]$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3}S)$$

+ ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\Rightarrow PQ^2 = (2-\sqrt{3})(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3}S)$

គេបាន $PQ^2 = 2RP^2$

នាំអោយ $\underline{Q\hat{R}P = 90^o}$ ។

១១៧. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$

តាមរូបមន្ត Heron: $A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}.\frac{a+c-b}{2}.\frac{b+c-a}{2}}$

$$4A \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\left[\frac{(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)}{3}\right]^3}$$

$$4A \leq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \quad (*)$$

ដោយ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

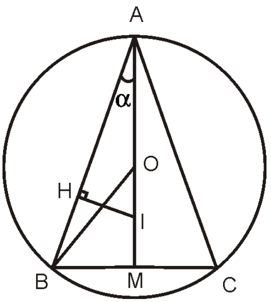
$$\leq a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(a^2+c^2)$$

$\Rightarrow\ (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

តាម (*) គេបាន $4A \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \leq \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\ \underline{a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}A}$ ។

១១៨. បង្ហាញថាចំងាយរវាងផ្ចិតនៃរង្វង់ទាំងពីរគឺ $\sqrt{R(R-2r)}$



តាង ABC ជាត្រីកោណសមបាតដែលមាន AB = AC ។

O & I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ & ចារឹកក្នុង

ΔABC ។ d ជាចំងាយរវាងផ្ចិតទាំង2 ។

M ជាជើងកំពស់ពី A ទៅលើ BC ។

H ជាជើងកំពស់ពី A ទៅលើ AB ។

តាង $\alpha = O\hat{A}B \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{HI}{AI} = \dfrac{HI}{AO+OI} = \dfrac{r}{R+d}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀត $\cos 2\alpha = \cos B\hat{O}M = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OI+IM}{OB} = \dfrac{r+d}{R}$ (**)

យក (*), (**) ជំនួសចូលរូបមន្ត $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ រួចទាញជាផលគុណកត្តា

គេបាន $(d+R+r)\left[d^2-R(R-2r)\right]=0$

ដោយ $(d+R+r)>0 \Rightarrow d^2-R(R-2r)=0 \Leftrightarrow d=\sqrt{R(R-2r)}$

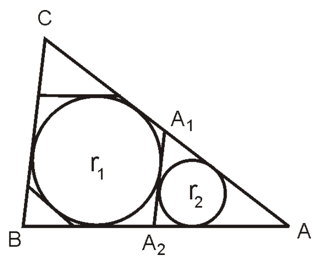
ដូចនេះចំងាយរវាងផ្ចិតនៃរង្វង់ទាំងពីរគឺ $\underline{\sqrt{R(R-2r)}}$ ។*១១៩.*

គណនាផលបូកសរុបរវាងក្រលាផ្ទៃរង្វង់ទាំង4

តាង r_1, r_2, r_3, r_4

ជាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទាំង 4 និង S

ជាក្រលាផ្ទៃនៃ



ΔABC ។ យើងបាន:

$$r_1 = \frac{S}{p} \ \& \ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

បណ្ដាបន្ទាត់ប៉ះទាំង3 ស្របនឹងជ្រុងទាំង3នៃ ΔABC

$\Rightarrow$ត្រីកោណទាំង3 ដូចនឹង ΔABC ដែលយើងទាញបាន:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_a};\ \frac{r_3}{r_1} = \frac{h_3}{h_b};\ \frac{r_4}{r_1} = \frac{h_4}{r_c}$$

ដែល $h_i\ (i = 2, 3, 4)$ ជាកំពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A, B, C នៃត្រីកោណតូចទាំង3 ។

ចំងាយរវាងជ្រុងនៃត្រីកោណតូចទាំង៣ទៅនឹងជ្រុងឈមនៃ ΔABC គឺ $2r_1$ ។

នាំអោយ $h_2 = h_a - 2r_1;\ h_3 = h_b - 2r_1;\ h_4 = h_c - 2r_1$

ក្នុង ΔABC មាន $h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}$

នោះ $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_a - 2r_1}{h_a} = 1 - \frac{2r_1}{h_a} \Rightarrow r_2 = r_1 - \frac{2r_1^2}{h_a} = \frac{S}{p} - \frac{2.S^2.a}{p^2.2S} = \frac{S(p-a)}{p^2}$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ គេបាន $r_3 = \frac{s(p-b)}{p^2};\ r_4 = \frac{S(p-c)}{p^2}$

តាង A ជាផលបូកក្រលាផ្ទៃសរុបនៃរង្វង់ទាំង 4

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ A &= \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)\\ &= \pi\left[\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2(p-a)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-b)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-c)^2}{p^4}\right]\\ &= \pi\frac{S^2}{p^4}\left[p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2\right]\end{aligned}$$

$$\underline{A = \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^3}}\ ។$$

ជំពូក ៤ លំហាត់ត្រិះរិះ

០១. ក្នុង ΔABC មាន $AB = AC$ ។ រង្វង់មួយប៉ះខាងក្នុងនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ និង ប៉ះនឹងជ្រុង AB, AC ត្រង់ P & Q រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថាចំនុចកណ្តាលនៃ PQ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

០២. គេអោយ A ជាចំនុចមួយក្នុងចំនោមចំនុចប្រសព្វពីរនៃរង្វង់ពីរដែលមិនប៉ុនគ្នា (C_1) & (C_2) ។ បន្ទាត់មួយក្នុងចំនោមបន្ទាត់ដែលប៉ះទៅនឹងរង្វង់ទាំងពីរប៉ះរង្វង់ (C_1) ត្រង់ P_1 និង (C_2) ត្រង់ P_2 ខណៈដែលបន្ទាត់មួយទៀតប៉ះ (C_1) ត្រង់ Q_1 និង (C_2) ត្រង់ Q_2 ។ គេអោយ M_1 ជាចំនុចកណ្តាលនៃ P_1Q_1 និង M_2 ជាចំនុចកណ្តាលនៃ P_2Q_2 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$ ។

០៣. រង្វង់ផ្ចិត O កាត់តាមកំពូល A & C នៃត្រីកោណ ABC និង កាត់ជ្រុង AB & AC ត្រង់ K & N រៀងគ្នា ។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង KBN កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំនុច B & M ផ្សេងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle OMB$ ជាមុំកែង ។

០៤. គេអោយ ABCD ជាចតុកោណប៉ោងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខណ្ឌ:

a. $AB = AD + BC$

b. មានចំនុច P ក្នុងចតុកោណដែលមានចំងាយ h ពី CD ដែល

$$AP = h + AD \ \& \ BP = h + BC$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$ ។

០៥. អង្កត់ធ្នូដែលមានប្រវែង $\sqrt{3}$ ចែករង្វង់ដែលមានកាំឯកតាជាពីរតំបន់ ។ កំនត់ចតុកោណកែងដែលមានក្រលាផ្ទៃបំផុតដែលអាចចារឹកក្នុងតំបន់តូច ។

០៦. អង្កត់ធ្នូ AB & CD នៃរង្វង់មួយកាត់គ្នាត្រង់ចំនុច E ដែលស្ថិតក្នុងរង្វង់ ។ គេអោយ M ជា ចំនុចនៅលើអង្កត់ EB ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ E ទៅនឹងរង្វង់ដែលកាត់តាម D, E, M កាត់បន្ទាត់ BC & AC ត្រង់ F & G រៀងគ្នា ។ គណនា $\frac{EG}{EF}$ ជាអនុគមន៍ $t=\frac{AM}{AB}$ ។

០៧. គេអោយ I ជាផ្ចិតត្រីកោណ ABC ។ រង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ប៉ះជ្រុង BC, CA & AB ត្រង់ K, L, & M រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់កាត់តាម B ហើយស្រប MK កាត់ LM & LK ត្រង់ R & S រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច ។

០៨. បន្ទាត់ AB ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ CAMN & NMBD ។ M នៅលើ CD ហើយស្ថិតនៅចន្លោះ C & D និង CD ស្របនឹង AB ។ អង្កត់ធ្នូ NA & CM កាត់គ្នាត្រង់ P ហើយអង្កត់ធ្នូ NB & MD កាត់គ្នាត្រង់ Q ។ បន្លាយ CA & DB កាត់គ្នាត្រង់ E ។ ស្រាយថា $PE=QE$ ។

០៩. គេអោយ ABC ជាត្រីកោណដែលមាន $B\hat{A}C=40^o \,\&\, A\hat{B}C=60^o$ ។ D & E ជាចំនុចនៅលើ AC & AB ដែល $C\hat{B}D=40^o \,\&\, B\hat{C}E=70^o$ ។ BD កាត់ CE ត្រង់ F ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ AF កែងនឹង បន្ទាត់ BC ។

១០. គេអោយចតុកោណប៉ោង ABCD ដែលមាន $C\hat{B}D=2A\hat{D}B, A\hat{B}D=2C\hat{D}B$ និង AB=CB ។ បង្ហាញថា AD = CD ។

១១. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ $\angle BAC$ & $\angle ABC$ កាត់ BC & CA ត្រង់ P & Q រៀងគ្នា ។ ចំនុច M & N ជាជើងចំនោលកែងពី P & Q ទៅលើ AB ។ គណនា $\angle MCN$ ។

១២. គេអោយចតុកោណ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ r ។ អង្កត់ទ្រូង AC & BD កាត់គ្នាត្រង់ E ។ បង្ហាញថាបើ $AC \perp BD$ នោះ $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2$ ។

១៣. អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណប៉ោង ABCD ប្រសព្វគ្នាត្រង់ O ។ ផ្ចិតនៃ ΔAOD & ΔBOC គឺ P & Q ។ អរតូសង់នៃ ΔAOB & ΔCOD គឺ R & S ។ បង្ហាញថា $PQ \perp RS$ ។

១៤. ត្រីកោណ ABC មានអរតូសង់ H ។ ជើងចំនោលកែងនៃ H លើកន្លះន្ទាត់ពុះមុំក្នុង និង ក្រៅនៃ $\angle BAC$ គឺ P & Q ។ បង្ហាញថា PQ កាត់តាមចំនុចកណ្តាលនៃ BC ។

១៥. P, Q & R ជាចំនុចនៅលើ ជ្រុង BA, CA & AB រៀងគ្នានៃ ΔABC ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណដែលមានកំពូលជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔAQR, ΔBRP & ΔCPQ ដូចនឹង ΔABC ។

១៦. គេអាយ ΔABC ដែលមាន AB = AC & O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ D ជាចំនុច កណ្តាល AB និង E ជាទីប្រជុំទំងន់នៃ ΔACD ។ បង្ហាញថា $OE \perp CD$ ។

១៧. ចតុកោណប៉ោង PQRS មានក្រលាផ្ទៃ A ។ O ជាចំនុចមួយនៅក្នុង PQRS ។ ស្រាយថា បើ $2A^2 = OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2$ នោះ PQRS ជាការេដែលមាន O ជាផ្ចិត ។

១៨. ចូររកគ្រប់ ΔABC ដែល $AB + AC = 2$ & $AD + BD = \sqrt{5}$ ។ AD ជាកំពស់គូស ចេញពី A កាត់ BC ត្រង់ D ។

១៩. ជ្រុង BC, CA & AB នៃត្រីកោណប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ X, Y & Z ។ ស្រាយថាផ្ចិតនៃរង្វង់ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចកណ្តាលនៃ BC និង ចំនុចកណ្តាលនៃ BC AX ។

២០. កំនត់ប្រវែងនៃជ្រុង ΔABC ដែលប្រវែងនៃកំពស់នីមួយៗគឺ 3, 4, 6 ។